

SÉRIE A, N° 3293

N° D'ORDRE :

4165

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Gilles LEGRAND

Ingenieur des Ponts et Chaussées

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE D'UNE GÉNÉRALISATION DES STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES
SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 mai 1958, devant la Commission d'Examen.

MM. PÉRÈS

Président.

LICHNEROWICZ

ZAMANSKY

} *Examineurs*

SÉRIE A, n° 3293

N° D'ORDRE :

4165

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Gilles LEGRAND

Ingénieur des Ponts et Chaussées

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE D'UNE GÉNÉRALISATION DES STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES
SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 mai 1958, devant la Commission d'Examen.

MM. PÉRÈS

Président.

LICHNEROWICZ }
ZAMANSKY } *Examineurs*



**

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen..... M. J. PÉRES.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	DANJON.....	T	Astronomie.
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	LAPORTE.....	T	Physique générale et Radio-activité.
PAUTHENIER.....	T	Électrotechnique générale.	JANET.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	PETIT.....	T	Biologie maritime.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	QUENEY.....	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	GALLIEN.....	T	Embryologie.
PÉRES.....	T	Mécanique des fluides et applications.	EICHHORN.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
M. CURIE.....	T	Physique (S. P. C. N.).	M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie Physique.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	THELLIER.....	T	Physique du Globe.
G. DARMOIS.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	L'HÉRITIER.....	T	Génétique.
J. BOURCART.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	GRIVET.....	T	Radioélectricité.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	PONCIN.....	T	Mécanique générale.
GRASSÉ.....	T	Évolution des êtres organisés.	DUBREIL.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	QUELET.....	T	Chimie organique.
BOULIGAND.....	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.	CAIGNARD.....	T	Géophysique appliquée.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
WYART.....	T	Minéralogie.	CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	JUNG.....	T	Pétrographie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.
MONNIER.....	T	Physiologie générale.	JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	VASSY.....	T	Physique de l'Atmosphère.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
H. CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	M. PRUVOST.....	T	Géologie.
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	AMIEL.....	T	Chimie générale (P. C. B.).
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	HOCART.....	T	Minéralogie.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	J.-P. MATHIEU.....	T	Physique (P. C. B.).
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	MAY.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
P. DRACH.....	T	Zoologie.	CHOQUET.....	T	Calcul différentiel et intégral.
KASTLER.....	T	Physique.	FELDMANN.....	T	Biologie (P. C. B.).
EPHRUSSI.....	T	Génétique.	GUINIER.....	T	Physique des solides.
WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique.	JOST.....	T	Physiologie comparée.
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	FORTET.....	T	Calcul des probabilités.
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
LUCAS.....	T	Recherches physiques.	CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	MALAVARD.....	T	Aviation.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel.
M. MORAND.....	T	Enseignement de Physique.	NORMANT.....	T	Chimie organique (P. C. B.).
SOLEILLET.....	T	Physique.	BÉNARD.....	T	Chimie.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
			DUGUÉ.....	T	Statistique mathématique.

GÉLOSO.....	T	Chimie (S. P. C. N.).	BRUN.....	Mécanique expérimentale des fluides.	
SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.	LEDERER.....	T	Chimie biologique.
ULRICH.....	T	Physiologie végétale.	M ^{me} DUBREIL.....	T	Mathématiques.
MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.	M ^{me} LELONG.....	T	Mathématiques (E. N. S.).
KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.	BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).
CHADEFAUD.....		Botanique.	COTTE.....	T	Physique (M. P. C.).
DESTRIAU.....	T	Physique (M. P. C.).	J.-E. DUBOIS.....	T	Chimie (S. P. C. N.).
M ^{lle} LE BRETON...	T	Physiologie générale.	LAMOTTE.....		Zoologie (E. N. S.).
SALEM.....	T	Mathématiques générales.	MICHEL.....	T	Chimie (S. P. C. N.).
LELONG.....	T	Mathématiques générales.	OLMER.....	T	Énergétique générale.
DEVILLERS.....		Anatomie et Histologie comparées.	ROUAULT.....	T	Physique générale.
EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.	GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.
FRANÇON.....		Physique (S. P. C. N.).	BARCHWITZ.....		Chimie physique.
GLANCEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	BROSSEL.....		Physique atomique.
GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. P. C.).	BUSER.....		Biologie animale (P. C. B.).
PISOT.....	T	Calcul des Probabilités.	CAMUS.....		Biologie végétale (P. C. B.).
E. ROCH.....	T	Géologie.	CASTAING.....		Physique générale.
SCHATZMANN.....		Astrophysique.	CURIEN.....		Minéralogie et Cristallographie.
TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.	MOYSE.....		Physiologie végétale.
ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.	NOIROT.....		Évolution des Êtres organisés.
LENNUIER.....		Physique (M. G. P.).	PANNETIER.....		Chimie (P. C. B.).
RIZET.....		Génétique.	POSSOMPES.....		Biologie animale (P. C. B.).
ROUTHIER.....		Géologie appliquée.	PULLMANN.....		Chimie théorique.
M ^{me} TONNELAT...		Théories physiques.	TEILLAC.....		Physique nucléaire et Radioactivité.
DIXMIER.....		Mathématiques (M. P. C.).	TONNELAT.....		Biologie physico-chimique.
SOUCHAY.....		Chimie générale.	VILLE.....		Économétrie.
AIGRAIN.....		Physique (P. C. B.).	WILLEMART.....		Chimie (P. C. B.).
BRUSSET.....		Chimie minérale.	DODÉ.....		Chimie.
M. LÉVY.....		Physique théorique.	FREYMAN.....		Physique (S. P. C. N.).
LENORMANT.....		Physiologie.	GUINOCHET.....		Biologie végétale (Orsay).
M ^{me} CHAIX.....		Chimie biologique.	ROLLET.....		Chimie (P. C. B.).
M ^{me} HUREL-PY...		Biologie végétale (P. C. B.).	M ^{lle} JOSIEN.....		Chimie (P. C. B.).
PIAUX.....		Chimie (P. C. B.).	CHEVALLEY.....	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
			DESNUELLE.....	T	Chimie biologique.

Secrétaire général..... C. MONIER.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545928_0015

A LA MÉMOIRE DE MON FRÈRE MARC
MORT POUR LA FRANCE

A MES PARENTS

A MA FEMME

Il m'est très agréable d'exprimer ma respectueuse gratitude à Monsieur LICHNEROWICZ, qui, en acceptant de diriger mes travaux, a rendu possibles mon affectation à un poste de recherche scientifique et l'élaboration de ma thèse. Je lui suis vivement reconnaissant de l'intérêt qu'il m'a constamment témoigné, des suggestions qu'il m'a faites et des nombreux conseils qu'il m'a donnés.

Je prie Monsieur le Doyen PÉRÈS, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury, de bien vouloir agréer mes vifs remerciements. Je suis heureux de remercier aussi Monsieur ZAMANSKY, qui a accepté de me proposer un sujet de seconde thèse et dont les encouragements m'ont été précieux.

PREMIÈRE THÈSE

Étude d'une généralisation des structures presque complexes
sur les variétés différentiables

Extrait des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*,
série II, tomes VII (1958) et VIII (1959)

ÉTUDE D'UNE GÉNÉRALISATION DES STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Par Gilles Legrand (Paris)

INTRODUCTION

Une structure presque complexe sur une variété différentiable V_{2n} est définie de façon classique par la donnée d'un champ différentiable de transformations linéaires $\mathbb{I}$ de l'espace vectoriel tangent T_x en chaque point x de V_{2n} , qui satisfont à la condition $\mathbb{I}^2 = -$ (Identité). Les valeurs propres de $\mathbb{I}$ sont $+i$ et $-i$. Les vecteurs propres associés à la valeur propre $+i$ (resp. $-i$) dans l'espace vectoriel $T_x^{\mathbb{C}}$ complexifié de T_x engendrent un sous-espace T_1 (resp. T_2) de $T_x^{\mathbb{C}}$; T_1 et T_2 sont supplémentaires et complexes conjugués.

On peut plus généralement considérer sur une variété différentiable V_m (de dimension m , non nécessairement paire) la structure définie par la donnée de deux champs différentiables de sous-espaces supplémentaires, T_1 et T_2 , de l'espace vectoriel tangent complexifié $T_x^{\mathbb{C}}$ en chaque point x de V_m ⁽¹⁾. De telles structures ont été envisagées par D. C. Spencer, sous le nom de structures de « presque-produit complexe » ⁽²⁾. Nous les appellerons brièvement « II-structures ».

Le présent travail a pour objet l'étude de ces II-structures ⁽³⁾.

La plupart des notions classiques et des propriétés concernant les structures presque complexes se généralisent de façon naturelle aux II-structures. Toutefois

⁽¹⁾ Le cas où T_1 ou T_2 coïncide avec $T_x^{\mathbb{C}}$ est trivial et sera exclu dans la suite.

⁽²⁾ Cf. [26] (les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin).

⁽³⁾ Nous avons exposé une partie des résultats de ce travail dans plusieurs notes à l'Académie des Sciences, indiquées dans la bibliographie.

les structures presque complexes possèdent une propriété remarquable: il existe en chaque point x une application biunivoque canonique de T_1 sur T_2 , à savoir l'application qui, à un vecteur de T_1 , fait correspondre son complexe conjugué. Ceci permet, dans l'étude des structures presque complexes, de considérer seulement le champ de sous-espaces T_1 . Il n'en est évidemment plus de même dans le cas général des Π -structures.

Soit $\bar{T}_2$ l'espace vectoriel complexe conjugué de T_2 . Dans le cas presque complexe, l'application identique de T_1 sur lui-même peut être envisagée comme un isomorphisme de T_1 sur $\bar{T}_2$. Plus généralement on peut étudier les Π -structures telles qu'il existe un champ différentiable d'isomorphismes de T_1 sur $\bar{T}_2$ (ce qui implique que la variété différentiable donnée est de dimension paire $2n$ et que T_1 et T_2 sont de dimension n). Nous verrons que ces Π -structures s'introduisent lorsqu'on cherche à généraliser la notion de structure presque hermitienne.

Dans tout ce travail, le mot « différentiable » est toujours entendu dans le sens « indéfiniment différentiable », même si cela n'est pas spécifié. Les variétés différentiables introduites sont supposées de dimension au moins égale à 2, connexes par arcs et telles que tout recouvrement par des ensembles ouverts soit réductible à un recouvrement dénombrable. De telles variétés peuvent être munies d'une structure de variété riemannienne de classe C^∞ .

Afin de fixer la terminologie, nous exposons sommairement dans le chapitre I des notions concernant les connexions infinitésimales sur un espace fibré principal. Nous étudions le cas des connexions linéaires et des connexions affines, qui sont les connexions définies sur deux espaces fibrés principaux attachés à une variété différentiable V_m : l'espace fibré des bases des espaces vectoriels T_x tangents aux différents points x de V_m et l'espace fibré des repères affines (un repère affine étant le couple d'une base et d'un vecteur de T_x). Nous indiquons notamment comment toute connexion affine peut être obtenue à partir d'une connexion linéaire et d'un tenseur une fois covariant, une fois contravariant. En particulier nous associons canoniquement à chaque connexion linéaire une connexion affine, que nous utilisons pour définir la forme de torsion de la connexion linéaire. Nous étudions aussi ce que deviennent ces notions quand on remplace l'espace vectoriel T_x par son complexifié.

Le chapitre II a pour objet la définition des Π -structures sur une variété différentiable et l'étude de deux notions qui s'introduisent naturellement par généralisation à partir du cas presque complexe: celle de tenseur de torsion d'une

Π -structure et celle de Π -connexion. La nullité du tenseur de torsion est une condition nécessaire et, dans le cas analytique au moins, suffisante pour qu'une Π -structure soit intégrable, en un sens que nous préciserons. Les calculs que nous sommes amenés à faire sur le tenseur de torsion sont rendus assez simples par l'introduction d'un opérateur linéaire $K(T)$, associé à ce tenseur, sur l'algèbre des formes extérieures à valeurs complexes définies sur V_m et l'utilisation d'une relation, dite relation fondamentale, qui existe entre $K(T)$, l'opérateur d de différentiation extérieure et des opérateurs C et M généralisant ceux de A. Lichnerowicz. Quant aux Π -connexions, elles généralisent les connexions presque complexes de A. Lichnerowicz, dont elles conservent les propriétés fondamentales. En outre, à toute Π -connexion définie sur une variété différentiable V_m munie d'une Π -structure nous associons deux « formes caractéristiques »; ce sont des 2-formes à valeurs complexes définies sur V_m , qui sont fermées et qui déterminent la même classe de cohomologie complexe, indépendante de la Π -connexion. La nullité de ces formes équivaut à une propriété remarquable du groupe d'holonomie restreint de la connexion.

Dans le chapitre III, nous étudions comment la notion de structure presque hermitienne subordonnée à une structure presque complexe peut être généralisée aux Π -structures; nous définissons ainsi les structures « presque hermitiennes au sens large ». De telles structures ne peuvent exister que sur les variétés différentiables de dimension paire. Alors, pour qu'une Π -structure sur une variété différentiable V_{2n} admette une structure presque hermitienne au sens large subordonnée, il faut et il suffit que T_1 et T_2 soient de dimension n et qu'il existe un champ différentiable d'isomorphismes de T_1 sur T_2 ; nous examinons de ce point de vue le cas particulier des structures presque hermitiennes au sens ordinaire. La notion de connexion presque hermitienne de A. Lichnerowicz peut être généralisée aux structures presque hermitiennes au sens large; nous définissons ainsi les H -connexions, qui s'identifient à des Π -connexions particulières. À toute structure presque hermitienne au sens large on peut associer des H -connexions canoniques. Les deux formes caractéristiques d'une H -connexion coïncident; dans le cas des structures presque hermitiennes au sens ordinaire, on obtient (à un facteur numérique près) la forme ψ de A. Lichnerowicz, utilisée pour déterminer la classe de Chern de degré 2.

Dans le chapitre IV sont examinés des cas particuliers de structures presque hermitiennes au sens large. Nous définissons (au sens large) les structures hermitiennes et pseudohermitiennes, les structures presque kählériennes, les

structures kählériennes et pseudokählériennes. Nous en donnons des propriétés qui généralisent celles des structures de même nom dans la terminologie usuelle.

L'objet du chapitre V est l'étude des Π -structures réelles, c'est-à-dire telles que T_1 et T_2 soient les complexifiés de deux sous-espaces supplémentaires de T_x . Sur une variété différentiable V_m , tout champ différentiable de transformations linéaires $\mathbb{T}$ de T_x (non réduites à des homothéties) satisfaisant à la condition $\mathbb{T}^2 = k$ (Identité), où k est une constante réelle non nulle, détermine une Π -structure réelle ou une structure presque complexe suivant que k est positive ou négative. Si m est pair, égal à $2n$, les Π -structures réelles sur V_{2n} telles que T_1 et T_2 soient de dimension n sont les structures presque paracomplexes de P. Libermann; les structures presque hermitiennes (au sens large) réelles subordonnées coïncident alors avec les structures presque parahermitiennes de cet auteur. À toute structure presque parahermitienne nous associons des structures presque complexes, dont nous donnons une propriété caractéristique. Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure presque parahermitienne sur une variété différentiable V_{2n} . Par application au cas $n = 1$, nous montrons que toute variété différentiable V_2 compacte admettant une structure presque parahermitienne est un tore.

Le chapitre VI consiste en l'étude d'une classe particulière de Π -structures, que nous appelons homogènes: ce sont les Π -structures définies sur un espace homogène de Lie G/H et invariantes par G . Le problème de l'existence d'une telle Π -structure sur un espace homogène donné se ramène à celui de l'existence, sur l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{G}^C$ de G , d'un opérateur linéaire ayant des propriétés convenables. Il en est de même du problème de l'existence d'une Π -structure homogène intégrable. Nous étudions le cas particulier des espaces homogènes dits réductifs (en un sens qui généralise celui de K. Nomizu), c'est-à-dire des espaces homogènes G/H tels que, $\mathfrak{h}^C$ désignant l'algèbre de Lie complexifiée de H , il existe un sous-espace vectoriel M de $\mathfrak{G}^C$ supplémentaire de $\mathfrak{h}^C$ et stable par le groupe adjoint de H . Nous montrons que l'existence d'une Π -structure homogène, ou d'une Π -structure homogène intégrable, sur un tel espace homogène est liée à des propriétés simples du sous-espace M . Enfin nous énonçons les théorèmes obtenus sur les Π -structures réelles homogènes.

CHAPITRE I.

CONNEXIONS INFINITÉSIMALES SUR UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL

Ce chapitre consiste en un exposé succinct des diverses définitions des connexions infinitésimales données par A. Lichnerowicz dans [22], des notions

fondamentales concernant ces connexions et de leurs applications aux connexions « linéaires » et « affines ».

Pour simplifier les notations, nous adoptons dans ce chapitre la convention suivante: étant donnée une application différentiable d'une variété différentiable dans une autre, l'application linéaire tangente en un point sera désignée par le même symbole.

1 - *Espaces fibrés principaux: terminologie et notations.*

Soit E un espace fibré principal différentiable (de classe C^∞), dont la base est une variété différentiable V_m de dimension m et le groupe structural un groupe de Lie G , opérant sur lui-même par translation à gauche. Nous désignerons par p la projection canonique $E \rightarrow V_m$. Soit Θ_z l'espace vectoriel tangent à E en un point z . Un vecteur de Θ_z sera dit *vertical* s'il appartient au sous-espace $\mathfrak{V}_z$ de Θ_z tangent à la fibre.

Donnons-nous un point x de V_m . À une carte locale de la structure fibrée, dont le domaine contient la fibre F_x au-dessus de x , est associé un homéomorphisme h_x de G sur F_x . Un point z de F_x peut ainsi être défini par

$$z = h_x(\gamma) \quad \gamma \in G.$$

Au champ de vecteurs tangents à G , invariant à gauche, déterminé par un élément ζ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G , nous associerons le champ de vecteurs verticaux défini sur F_x par

$$\tau(z) = h_x(L_\gamma \zeta),$$

où $\tau(z)$ est le vecteur du champ au point z et L_γ l'opération de translation à gauche par γ . On vérifie que ce champ est indépendant de la carte locale choisie.

Inversement, étant donné un vecteur τ de $\mathfrak{V}_z$, il existe un élément $\zeta \in \mathfrak{G}$ et un seul tel qu'au point z le vecteur du champ associé coïncide avec τ . On dit que ζ est *engendré* par τ .

Notons que G opère par translation à droite sur E . D_g désignera l'opération de translation à droite par l'élément $g \in G$, ainsi que son prolongement aux vecteurs tangents à E . Pour abréger, nous écrirons parfois « zg » au lieu de « $D_g z$ ».

2 - *Connexions infinitésimales.*

A. Une *connexion infinitésimale* sur l'espace fibré principal E est définie par la donnée d'un champ de sous-espaces $\mathfrak{H}_z$ de Θ_z ayant les propriétés suivantes:

- a) $\mathfrak{H}_z$ dépend différentiablement de z .
 b) $\mathfrak{H}_z$ est supplémentaire de $\mathfrak{V}_z$. Tout vecteur τ de Θ_z est donc la somme d'un vecteur vertical $\mathfrak{V}\tau$ et d'un vecteur $\mathfrak{H}\tau \in \mathfrak{H}_z$. $\mathfrak{V}\tau$ (resp. $\mathfrak{H}\tau$) est la partie *verticale* (resp. *horizontale*) de τ . Si $\mathfrak{V}\tau = 0$, τ est dit horizontal.
 c) $\mathfrak{H}_{D_g z} = D_g \mathfrak{H}_z$.

B. À une connexion infinitésimale est associée canoniquement une 1-forme ω à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G , c'est-à-dire, pour tout $z \in E$, une application linéaire de Θ_z dans $\mathfrak{G}$: pour $\tau \in \Theta_z$, $\omega(\tau)$ est l'élément de $\mathfrak{G}$ engendré par $\mathfrak{V}\tau$. ω possède les propriétés suivantes:

- a) ω dépend différentiablement de z .
 b) Si τ est vertical, $\omega(\tau)$ est l'élément de $\mathfrak{G}$ engendré par τ .
 c) $\omega(D_g \tau) = (\text{adj. } g^{-1})\omega(\tau)$, où $(\text{adj. } g^{-1})$ désigne l'image de l'élément g^{-1} par la représentation adjointe.

Inversement soit ω une 1-forme sur E à valeurs dans $\mathfrak{G}$ ayant les trois propriétés précédentes. Désignons par $\mathfrak{H}_z$ le sous-espace de Θ_z constitué par les vecteurs τ tels que $\omega(\tau) = 0$. Le champ $\mathfrak{H}_z$ définit une connexion infinitésimale et ω est la 1-forme associée.

C. Considérons un recouvrement de V_m par des ouverts U_i (i appartenant à un ensemble d'indices I) tel qu'au-dessus de chaque U_i soit définie une section locale différentiable $x \mapsto z_i(x)$. z_i définit un isomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x à V_m dans $\Theta_{z_i(x)}$. Étant donnée sur E une connexion infinitésimale, définie par une 1-forme ω , si on compose cet isomorphisme avec l'application $\tau \mapsto \omega(\tau)$, on obtient pour chaque point $x \in U_i$ une application linéaire de T_x dans $\mathfrak{G}$, c'est-à-dire une 1-forme ω_i sur U_i à valeurs dans $\mathfrak{G}$. ω_i possède les propriétés suivantes:

- a) ω_i dépend différentiablement de x .
 b) Pour $x \in U_i \cap U_j$ (où $i, j \in I$), soit $g_{ij}(x)$ l'élément de G tel que $z_j(x) = z_i(x)g_{ij}(x)$. Alors

$$\omega_j = (\text{adj. } g_{ij}^{-1})\omega_i + g_{ij}^{-1}dg_{ij}.$$

Inversement la donnée, pour un recouvrement de V_m par des ouverts munis chacun d'une section locale $x \mapsto z_i(x)$, de formes ω_i à valeurs dans $\mathfrak{G}$ satisfaisant aux propriétés a) et b) détermine une connexion infinitésimale de la façon suivante:

- α) Pour τ vertical, on appelle $\omega(\tau)$ l'élément de $\mathfrak{G}$ engendré par τ .
 β) Pour τ non vertical, on choisit une section locale tangente en z à τ , définie par $x \mapsto z_i(x)g(x)$ où $g(x) \in G$, et on pose

$$\omega(\tau) = (\text{adj. } g^{-1})\omega_i(p\tau) + g^{-1}dg.$$

On vérifie que $\omega(\tau)$ ne dépend ni de la section locale, ni de l'ouvert U_i (dans le cas où x appartient à plusieurs ouverts du recouvrement), et que la forme ω satisfaisait aux conditions a), b), c) de **B**.

3 - Formes tensorielles. Différentielle absolue et courbure.

Donnons-nous, sur l'espace fibré principal E , une q -forme π à valeurs dans un espace vectoriel M de dimension finie sur le corps des réels ou des complexes, c'est-à-dire, pour chaque point $z \in E$, une application linéaire dans M de l'espace vectoriel des tenseurs contravariants d'ordre q , complètement antisymétriques, définis sur Θ_z . $\tau_1, \dots, \tau_q$ étant q vecteurs de Θ_z , nous désignerons par $\pi(\tau_1, \dots, \tau_q)$ la valeur de π pour $\tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_q$. Les q -formes introduites seront toujours supposées dépendre différentiablement de z .

Soit $\mathfrak{R}(G)$ une représentation linéaire de G dans M . On dit que π est une q -forme tensorielle de type $\mathfrak{R}(G)$ si elle satisfait aux conditions suivantes:

- a) $\pi(\tau_1, \dots, \tau_q) = 0$ dès que l'un des vecteurs $\tau_1, \dots, \tau_q$ est vertical.
 b) $\pi(D_g \tau_1, \dots, D_g \tau_q) = \mathfrak{R}(g^{-1})\pi(\tau_1, \dots, \tau_q)$, pour tout $g \in G$.

On étend cette définition au cas $q = 0$. Une 0-forme tensorielle de type $\mathfrak{R}(G)$, ou tenseur de type $\mathfrak{R}(G)$, à valeurs dans M est une application t de E dans M telle que $t(D_g z) = \mathfrak{R}(g^{-1})t(z)$. Pour $x \in V_m$, une application t de $p^{-1}(x)$ dans M satisfaisant à cette relation sera dite un tenseur de type $\mathfrak{R}(G)$ défini au point x .

Par exemple, si l'on a défini sur E deux connexions infinitésimales, déterminées par des 1-formes ω_1 et ω_2 à valeurs dans $\mathfrak{G}$,

$$\chi = \omega_1 - \omega_2$$

est une 1-forme tensorielle de type « représentation adjointe ». Ceci permet d'obtenir toutes les connexions infinitésimales sur E à partir de l'une d'entre elles.

Soit π une q -forme tensorielle de type $\mathfrak{R}(G)$ à valeurs dans M . La condition a) peut être exprimée en disant que $\pi(\tau_1, \dots, \tau_q)$ ne dépend que des classes d'équivalence de $\tau_1, \dots, \tau_q$ modulo le sous-espace vectoriel $\mathfrak{V}_z$ de Θ_z . Or l'espace quotient $\Theta_z/\mathfrak{V}_z$ s'identifie à l'espace vectoriel T_x tangent à V_m au point $x = pz$. Pour z fixé, on peut ainsi construire à partir de la forme π une application linéaire dans M de l'espace vectoriel $T_x^{\wedge(q)}$ des tenseurs contravariants

d'ordre q , complètement antisymétriques, définis sur T_x . $u_1, \dots, u_q$ étant q vecteurs de T_x , désignons par $\psi(u_1, \dots, u_q, z)$ l'image de $u_1 \wedge \dots \wedge u_q$ par cette application; on a $\psi(u_1, \dots, u_q, z) = \pi(\tau_1, \dots, \tau_q)$, où $\tau_1, \dots, \tau_q$ sont des vecteurs de Θ_z tels que $p\tau_1 = u_1, \dots, p\tau_q = u_q$. Pour $u_1, \dots, u_q$ fixés, l'application de $p^{-1}(x)$ dans M déterminée par $z \mapsto \psi(u_1, \dots, u_q, z)$ est, d'après la condition b), un tenseur de type $\mathbb{R}(G)$ défini au point x . On peut ainsi associer canoniquement à la forme π une application linéaire de $T_x^{\wedge(q)}$ dans l'espace vectoriel des tenseurs de type $\mathbb{R}(G)$ à valeurs dans M définis au point x ; inversement la donnée pour tout point x de V_m d'une telle application, dépendant différentiablement de x , détermine une q -forme tensorielle de type $\mathbb{R}(G)$. Par abus de langage, nous identifierons dans les chapitres suivants cette application à la forme π et nous désignerons par $\pi(u_1, \dots, u_q)$ le tenseur de type $\mathbb{R}(G)$ image de $u_1 \wedge \dots \wedge u_q$.

Supposons donnée sur E une connexion infinitésimale. La *différentielle absolue* $\nabla\pi$ d'une q -forme π à valeurs dans M , relativement à cette connexion, est la $(q+1)$ -forme définie en chaque point $z \in E$ par

$$\nabla\pi(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q) = d\pi(\mathbb{H}\tau_0, \mathbb{H}\tau_1, \dots, \mathbb{H}\tau_q),$$

où $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q$ sont des vecteurs quelconques de Θ_z et où d désigne l'opérateur de différentiation extérieure ⁽¹⁾.

Si π est une q -forme tensorielle, $\nabla\pi$ est une $(q+1)$ -forme tensorielle de même type.

Prenons maintenant pour π la forme ω définissant la connexion et posons $\Omega = \nabla\omega$. On vérifie que Ω est une 2-forme tensorielle de type « adjointe », qu'on appelle la *forme de courbure* de la connexion. τ_1 et τ_2 étant deux vecteurs quelconques de Θ_z , la valeur de Ω pour $\tau_1 \wedge \tau_2$ est donnée par la formule

$$\Omega(\tau_1, \tau_2) = d\omega(\tau_1, \tau_2) + [\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)],$$

où le symbole $[]$ représente le crochet défini dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

4 - Groupes d'holonomie.

Les *chemins* dont il sera question dans ce paragraphe et dans tous ceux relatifs aux groupes d'holonomie seront supposés différentiables (de classe C^∞)

⁽¹⁾ La différentielle extérieure d'une q -forme π à valeurs dans M peut être définie de la façon suivante. Soit f une forme linéaire arbitraire sur M (à valeurs scalaires). En composant π avec f , on obtient une q -forme $(f \circ \pi)$ sur E à valeurs scalaires, dont la différentielle extérieure $d(f \circ \pi)$ est définie de façon usuelle. La différentielle extérieure $d\pi$ est la $(q+1)$ -forme sur E à valeurs dans M déterminée par la condition $f \circ d\pi = d(f \circ \pi)$ pour toute forme linéaire f sur M .

par morceaux, c'est-à-dire formés par le produit d'un nombre fini de chemins différentiables.

A. Un chemin $z(t)$ de l'espace fibré principal E muni d'une connexion infinitésimale est dit *horizontal* si toutes ses tangentes sont horizontales.

On appelle *groupe d'holonomie* en z l'ensemble Ψ_z des éléments $g \in G$ tels que z et zg^{-1} puissent être reliés par un chemin horizontal.

On vérifie que Ψ_z est bien un sous-groupe de G et que les groupes d'holonomie $\Psi_z, \Psi_{z'}$, en deux points z, z' , sont deux sous-groupes conjugués.

On appelle *groupe d'holonomie restreint* en z l'ensemble σ_z des éléments $g \in G$ tels que z et zg^{-1} puissent être reliés par un chemin horizontal dont la projection sur la base V_m soit un lacet homotope à 0.

On vérifie que σ_z est bien un groupe et que c'est un sous-groupe invariant de Ψ_z . On démontre même que σ_z est la composante connexe de l'identité de Ψ_z .

B. Donnons-nous un chemin $x(t)$ de V_m ($0 \leq t \leq 1$) et un chemin $z(t)$ de E au-dessus de $x(t)$: $p z(t) = x(t)$. Tout autre chemin au-dessus de $x(t)$ peut être défini par

$$z'(t) = z(t)g^{-1}(t),$$

où $g(t) \in G$. Pour que le chemin $z'(t)$ soit horizontal, il faut et il suffit que

$$g^{-1}dg = \omega(dz),$$

où la forme ω est prise au point $z(t)$. La solution de cette équation différentielle, telle que $g(0) = g_0$, sera dite le *développement* du chemin $z(t)$ sur G à partir de g_0 .

En particulier le développement d'un lacet issu d'un point $z \in E$ à partir de $g_0 = e$ (élément-unité de G) conduit à un élément $g(1)$ tel que z et $zg^{-1}(1)$ soient reliés par un chemin horizontal. Donc $g(1)$ appartient à Ψ_z . Inversement tout élément de Ψ_z peut être obtenu par cette méthode. $g(1)$ ne change pas si on remplace le lacet envisagé par un autre lacet en z ayant même projection sur V_m . Désignons cette projection par l . Nous dirons que $g(1)$ est l'élément du groupe d'holonomie Ψ_z obtenu par développement du lacet l de V_m .

Supposons qu'on ait associé à tout point x de V_m un voisinage $U(x)$ de x . Un lacet l_x en x sera dit *petit* s'il est contenu dans $U(x)$. Soient $l(x, y)$ un chemin joignant x à un point y de V_m et l_y un lacet petit en y . Le lacet en x $\hat{l}_x = l(x, y)^{-1}l_y l(x, y)$ sera dit un *lasso* d'origine x . Le *lemme de factorisation* de Lichnerowicz [22] permet de remplacer tout lacet en x homotope à 0 par un

lacet formé d'un produit fini de lassos d'origine x , dont le développement conduise au même élément du groupe d'holonomie σ_x en un point z arbitraire au-dessus de x .

C. Soit $\mathcal{R}(G)$ une représentation linéaire de G dans un espace vectoriel M de dimension finie. Donnons-nous au point $x_0 \in V_m$ un tenseur t_0 de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans M . Soit $l(x_0, x_1)$ un chemin de V_m joignant x_0 à un point x_1 . Construisons au-dessus de $l(x_0, x_1)$ le chemin horizontal de E issu d'un point z_0 de $p^{-1}(x_0)$; il aboutit à un point z_1 de $p^{-1}(x_1)$. Le tenseur t_1 de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans M défini au point x_1 , dont la valeur $t_1(z_1)$ en z_1 coïncide avec $t_0(z_0)$, est indépendant du choix de z_0 dans la fibre au-dessus de x_0 . Nous dirons que t_1 se déduit de t_0 par *transport* le long du chemin $l(x_0, x_1)$.

Pour tout $x \in V_m$, désignons par $N_x[\mathcal{R}(G)]$, ou brièvement N_x , l'ensemble des tenseurs de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans M définis au point x , muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel. Le transport le long d'un chemin joignant un point x_0 à un point x_1 détermine un isomorphisme de N_{x_0} sur N_{x_1} . En particulier le transport le long d'un lacet l_x en x détermine un isomorphisme de N_x sur lui-même. L'isomorphisme réciproque sera appelé l'isomorphisme *induit* par le lacet. Choisissons un point z dans $p^{-1}(x)$. L'isomorphisme induit par le lacet l_x transforme un tenseur t de type $\mathcal{R}(G)$ défini au point x en le tenseur t' déterminé par $t'(z) = t(zg^{-1})$ où g est l'élément du groupe d'holonomie Ψ_z obtenu par développement du lacet l_x . À chaque élément g de Ψ_z nous associerons l'isomorphisme de N_x sur lui-même ainsi défini, que nous désignerons par $r(g)$. r détermine une représentation linéaire de Ψ_z dans N_x . Pour qu'elle soit fidèle, il faut et il suffit que la restriction de $\mathcal{R}(G)$ au sous-groupe Ψ_z de G soit elle-même fidèle.

Il résulte de la définition de r que le groupe de transformations linéaires de N_x image de Ψ_z par cette représentation est indépendant du choix de z dans $p^{-1}(x)$. Nous l'appellerons *groupe d'holonomie de la connexion au point x relatif aux tenseurs de type $\mathcal{R}(G)$* et nous le désignerons par $\Psi_x[\mathcal{R}(G)]$. En nous limitant aux isomorphismes induits par les lacets en x homotopes à 0, nous définissons le groupe d'holonomie *restreint* $\sigma_x[\mathcal{R}(G)]$, sous-groupe de $\Psi_x[\mathcal{R}(G)]$: c'est l'image de σ_x par r .

Nous dirons qu'un tenseur t de type $\mathcal{R}(G)$ défini au point x est *invariant par l'élément g de Ψ_z* s'il est invariant par $r(g)$; ceci revient à dire que $t(zg^{-1}) = t(z)$. Nous dirons que t est *invariant par Ψ_z* s'il est invariant par

$\mathbb{U}_x(\mathbb{R}(G))$; cette notion est indépendante du choix de z dans $p^{-1}(x)$. Si t est invariant par $\mathbb{U}_z$, le tenseur t_1 défini au point $y \in V_m$, qui se déduit de t par transport le long d'un chemin joignant x à y , est indépendant du choix de ce chemin. Quand y décrit V_m , t_1 définit sur toute la variété un tenseur de type $\mathbb{R}(G)$, dont la différentielle absolue est nulle. Inversement, étant donné sur V_m un tenseur t_1 de type $\mathbb{R}(G)$ à différentielle absolue nulle, le tenseur défini au point x par restriction de t_1 à la fibre $p^{-1}(x)$ est invariant par $\mathbb{U}_x[\mathbb{R}(G)]$.

5 - Connexions linéaires et connexions affines.

A. Étant donnée une variété différentiable V_m , nous allons lui attacher deux espaces fibrés principaux ayant pour groupe structural respectivement le groupe linéaire $GL(m, R)$ ⁽¹⁾ et le groupe affine $\mathfrak{A}(m, R)$. Précisons que nous définissons le groupe $\mathfrak{A}(m, R)$ comme l'ensemble des couples (A, α) d'une matrice $A = (A_j^i)$ de $GL(m, R)$ et d'un élément $\alpha = (\alpha^i)$ de l'espace numérique R^m , le produit de deux éléments étant déterminé par $(A, \alpha)(B, \beta) = (AB, \beta + B^{-1}\alpha)$, où $(B^{-1}\alpha)^i = (B^{-1})_j^i \alpha^j$ ⁽²⁾.

Soit T_x l'espace vectoriel tangent au point $x \in V_m$. Nous dirons qu'une base de l'espace vectoriel T_x est une *base relative* à x . Soient $E(V_m)$ l'ensemble des bases relatives aux différents points de V_m et p l'application $E(V_m) \rightarrow V_m$ qui, à une base relative à x , fait correspondre le point x lui-même. $E(V_m)$ a, par rapport à p , une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_m , de groupe structural $GL(m, R)$. $E(V_m)$ muni de cette structure sera appelé *l'espace fibré des bases*.

Nous appelons *connexion linéaire* sur V_m toute connexion infinitésimale sur $E(V_m)$. On peut déterminer une telle connexion par une 1-forme ω sur $E(V_m)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de $GL(m, R)$. ω peut être représentée par une matrice $m \times m$ dont les éléments ω_i^j sont des formes de Pfaff sur $E(V_m)$.

Si on détermine une connexion linéaire au moyen de sections locales de $E(V_m)$, on retrouve la définition habituelle d'une connexion dite « affine ». Comme nous allons le voir, nous employons cette dernière dénomination dans un sens

⁽¹⁾ Les notations adoptées pour désigner les groupes linéaires sont celles de C. Chevalley [6].

⁽²⁾ Soit (ε_i) la base canonique de R^m . On détermine un isomorphisme de $\mathfrak{A}(m, R)$ sur le groupe des transformations affines de R^m en associant à l'élément (A, α) de $\mathfrak{A}(m, R)$ la transformation affine qui résulte de la composition de la transformation linéaire $\varepsilon_i \rightarrow f(\varepsilon_i) = A_i^h \varepsilon_h$ et de la translation définie par le vecteur $\alpha^h f(\varepsilon_h)$.

différent. La terminologie que nous adoptons est destinée à mettre en évidence les groupes structuraux des espaces fibrés envisagés.

L'espace vectoriel T_x admet une structure naturelle d'espace affine. Un repère $[(e_i), \xi]$ de l'espace affine T_x , c'est-à-dire le couple d'une base (e_i) et d'un vecteur $\xi = \xi^i e_i$ de T_x , sera appelé *repère relatif* à x . Soient $\mathfrak{E}(V_m)$ l'ensemble des repères relatifs aux différents points de V_m et p_1 l'application $\mathfrak{E}(V_m) \rightarrow V_m$ qui, à un repère relatif à x , fait correspondre le point x lui-même. $\mathfrak{E}(V_m)$ a, par rapport à p_1 , une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_m , dont le groupe structural est le groupe affine $\mathfrak{A}(m, R)$. $\mathfrak{E}(V_m)$ muni de cette structure sera appelé *l'espace fibré des repères* ⁽¹⁾.

Nous appelons *connexion affine* sur V_m toute connexion infinitésimale sur $\mathfrak{E}(V_m)$. On peut déterminer une telle connexion par une 1-forme $\hat{\omega}$ sur $\mathfrak{E}(V_m)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathfrak{A}(m, R)$. $\hat{\omega}$ peut être représentée par le couple d'une matrice $m \times m (\hat{\omega}_j^i)$ et d'une matrice-colonne à m éléments $(\hat{\omega}_0^i)$, où $\hat{\omega}_j^i$ et $\hat{\omega}_0^i$ sont des formes de Pfaff sur $\mathfrak{E}(V_m)$.

Soit φ l'application $\mathfrak{E}(V_m) \rightarrow E(V_m)$ qui, au repère $[(e_i), \xi]$, fait correspondre la base (e_i) . Un vecteur τ tangent à $\mathfrak{E}(V_m)$ au point $[(e_i), \xi]$ est déterminé par la donnée du vecteur $\varphi\tau$ tangent à $E(V_m)$ au point (e_i) et des m composantes $d\xi^i$. Soit (θ^i) la cobase duale de (e_i) , c'est-à-dire la base de l'espace vectoriel T_x^* , dual de T_x , telle que $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ (symbole de Kronecker). En identifiant $\mathfrak{E}(V_m)$ à un sous-espace de l'espace fibré des bases de $R \times V_m$ (où R est la droite numérique), nous avons obtenu dans [15] le résultat suivant :

THÉOREME. *Toute connexion affine $[(\hat{\omega}_j^i), (\hat{\omega}_0^i)]$ peut être définie par la donnée sur V_m d'une connexion linéaire (ω_j^i) et d'un tenseur différentiable (t_j^i) une fois covariant, une fois contravariant, au moyen des formules*

$$(1) \quad \hat{\omega}_j^i(\tau) = \omega_j^i(\varphi\tau),$$

$$(2) \quad \hat{\omega}_0^i(\tau) = t_j^i \theta^j(p_1\tau) + d\xi^i + \omega_j^i(\varphi\tau)\xi^j,$$

où les $\hat{\omega}_j^i$ et $\hat{\omega}_0^i$ sont pris au point $[(e_i), \xi]$ de $\mathfrak{E}(V_m)$ et les ω_j^i et t_j^i au point (e_i) de $E(V_m)$.

Posons $\hat{\theta}^i(\tau) = \theta^i(p_1\tau)$; les $\hat{\theta}^i$ sont des formes de Pfaff sur $\mathfrak{E}(V_m)$. En

⁽¹⁾ Le groupe structural de $\mathfrak{E}(V_m)$ peut être réduit (au sens de N. Steenrod [27]) au sous-groupe de $\mathfrak{A}(m, R)$ défini par $\alpha = 0$. Ce sous-groupe est isomorphe à $GL(m, R)$.

introduisant le symbole ∇ de différentiation absolue par rapport à la connexion linéaire (ω_j^i) , on peut écrire la formule (2) sous la forme abrégée ⁽¹⁾

$$\hat{\omega}_0^i = t_j^i \hat{\theta}^j + \nabla \xi^i.$$

La connexion affine obtenue en prenant $t_j^i = \delta_j^i$ sera dite *canoniquement associée* à la connexion linéaire (ω_j^i) .

B. La forme de courbure d'une connexion linéaire (ω_j^i) est la 2-forme tensorielle sur $E(V_m)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de $GL(m, R)$ définie par

$$(3) \quad \Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_h^i \wedge \omega_j^h.$$

Pour tout vecteur σ tangent à $E(V_m)$ au point (e_i) , posons $\hat{\theta}^i(\sigma) = \theta^i(p\sigma)$; les $\hat{\theta}^i$ sont des formes de Pfaff sur $E(V_m)$. On peut alors écrire

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{j,kl}^i \hat{\theta}^k \wedge \hat{\theta}^l \quad (R_{j,kl}^i = -R_{j,lk}^i)$$

et les $R_{j,kl}^i$ définissent un tenseur sur V_m . On l'appelle le *tenseur de courbure* de la connexion linéaire.

La forme de courbure d'une connexion affine $[(\hat{\omega}_j^i), (\hat{\omega}_0^i)]$ est la 2-forme tensorielle sur $\mathfrak{E}(V_m)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathfrak{A}(m, R)$ définie par

$$(4) \quad \hat{\Omega}_j^i = d\hat{\omega}_j^i + \hat{\omega}_h^i \wedge \hat{\omega}_j^h, \quad \hat{\Omega}_0^i = d\hat{\omega}_0^i + \hat{\omega}_h^i \wedge \hat{\omega}_0^h.$$

En particulier on a pour la connexion affine canoniquement associée à la connexion linéaire (ω_j^i)

$$\hat{\Omega}_0^i = d\hat{\theta}^i + \hat{\omega}_j^i \wedge \hat{\theta}^j + \hat{\Omega}_j^i \xi^j,$$

où $\hat{\Omega}_j^i(\tau_1, \tau_2) = \Omega_j^i(\varphi\tau_1, \varphi\tau_2)$ pour tout couple (τ_1, τ_2) de vecteurs tangents à $\mathfrak{E}(V_m)$ au point $[(e_i), \xi]$. Identifions $E(V_m)$ au sous-espace de $\mathfrak{E}(V_m)$ déterminé par les équations $\xi^i = 0$. La restriction de $(\hat{\Omega}_0^i)$ à ce sous-espace définit sur $E(V_m)$ une 2-forme de type « vectorielle » (à valeurs dans un espace vectoriel de dimension m)

$$(5) \quad T^i = d\hat{\theta}^i + \omega_j^i \wedge \hat{\theta}^j,$$

qu'on appelle la *forme de torsion* de la connexion linéaire (ω_j^i) . Si on pose

⁽¹⁾ Il s'agit d'une convention d'écriture, les $d\xi^i$ étant des variables indépendantes et non les différentielles des composantes d'un champ de vecteurs donné.

$T^i = \frac{1}{2} t_j^i \dot{\theta}^j \wedge \dot{\theta}^k (t_j^i = -t_k^i)$, les t_j^i définissent un tenseur sur V_m . On l'appelle le *tenseur de torsion* de la connexion linéaire ⁽¹⁾.

Par différentiation extérieure des deux membres de (5), on obtient, en tenant compte de (3),

$$(6) \quad dT^i = \Omega_j^i \wedge \dot{\theta}^j - \omega_j^i \wedge T^j.$$

La relation (6), que nous utiliserons ultérieurement, est l'une des classiques identités de Bianchi.

C. Soit $\mathbb{R}_0$ l'isomorphisme canonique de $GL(m, R)$ sur le groupe des transformations linéaires de l'espace numérique R^m : pour $A = (A_j^i) \in GL(m, R)$ et $\alpha = (\alpha^i) \in R^m$, on a $[\mathbb{R}_0(A)\alpha]^i = A_j^i \alpha^j$. Les tenseurs de type $\mathbb{R}_0[GL(m, R)]$ à valeurs dans R^m , définis au point x de V_m au moyen de l'espace fibré $E(V_m)$, peuvent être identifiés aux vecteurs tangents en x à V_m . Pour abréger, posons $G = GL(m, R)$. L'espace vectoriel T_x s'identifie à l'espace vectoriel $N_x[\mathbb{R}_0(G)]$ au sens du paragraphe 4.

Si V_m est munie d'une connexion linéaire, le groupe d'holonomie $\Psi_x[\mathbb{R}_0(G)]$ est alors un groupe de transformations linéaires de T_x . C'est ce groupe qui est appelé usuellement *groupe d'holonomie homogène* de la connexion en x . Pour $z \in p^{-1}(x)$ l'application r définie au paragraphe 4 détermine un isomorphisme de Ψ_z sur $\Psi_x[\mathbb{R}_0(G)]$. Le groupe d'holonomie restreint $\sigma_x[\mathbb{R}_0(G)]$ est appelé groupe d'holonomie homogène restreint de la connexion en x .

Si V_m est munie d'une connexion affine, la réalisation du groupe d'holonomie en un point quelconque de $p_1^{-1}(x)$ comme groupe de transformations affines de T_x peut être obtenue par des considérations analogues, que nous ne développerons pas, de tels groupes n'intervenant pas dans la suite ⁽²⁾. En particulier on peut définir ainsi le groupe d'holonomie « non homogène » d'une connexion linéaire, en prenant la connexion affine canoniquement associée.

6 - Connexions linéaires et connexions affines complexes.

Aucune modification essentielle n'intervient si on remplace, dans ce qui précède, l'espace vectoriel T_x par son complexifié T_x^C . Une base de T_x^C sera

⁽¹⁾ On appelle souvent tenseur de torsion le tenseur défini par $S_{jk}^i = \frac{1}{2} t_k^i t_j^i$.

⁽²⁾ Soit $\mathbb{R}_1(G')$ la représentation linéaire de $G' = \mathfrak{A}(m, R)$ dans R^{m+1} déterminée par $\mathbb{R}_1[(A, \alpha)]\varepsilon_0 = \varepsilon_0 + A_h^j \alpha^h \varepsilon_j$, $\mathbb{R}_1[(A, \alpha)]\varepsilon_i = A_i^j \varepsilon_j$ ($i, j, h = 1, \dots, m$), où $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est la base canonique de R^{m+1} . La méthode repose sur une identification du groupe des transformations affines de T_x à un groupe de transformations linéaires de l'espace vectoriel $N_x(\mathbb{R}_1(G'))$ défini au moyen de l'espace fibré $\mathfrak{E}(V_m)$.

dite une *base complexe relative* à x . L'ensemble $E_C(V_m)$ des bases complexes relatives aux différents points de V_m admet une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_m , de groupe structural $GL(m, C)$. Nous appellerons *connexion linéaire complexe* toute connexion infinitésimale sur $E_C(V_m)$. La 1-forme ω définissant une telle connexion peut être représentée par une matrice $m \times m$ dont les éléments ω_i^j sont des formes de Pfaff sur $E_C(V_m)$ à valeurs complexes. L'espace $E(V_m)$ défini plus haut étant identifié de façon naturelle à un sous-espace de $E_C(V_m)$, toute connexion linéaire au sens du paragraphe précédent (que nous pourrions appeler, pour préciser, *connexion linéaire réelle*) détermine canoniquement une *connexion linéaire complexe*.

Le couple d'une base complexe relative à x et d'un vecteur de T_x^C sera appelé un *repère (affine) complexe relatif* à x . L'ensemble des repères complexes relatifs aux différents points de V_m admet une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_m , dont le groupe structural est le groupe affine complexe $\mathfrak{A}(m, C)$ défini de façon analogue à $\mathfrak{A}(m, R)$, en remplaçant les éléments réels par des éléments complexes. Une *connexion affine complexe* est une connexion infinitésimale sur cet espace fibré principal. Toute connexion affine complexe peut être obtenue à partir d'une connexion linéaire et d'un tenseur complexes de la même façon que dans le cas réel.

La forme de courbure de la connexion linéaire complexe (ω_j^i) est encore déterminée par la formule (3). On définit aussi la forme de torsion.

Enfin, comme dans le cas réel, on peut définir le groupe d'holonomie homogène d'une connexion linéaire complexe en $x \in V_m$; c'est un groupe de transformations linéaires de T_x^C , isomorphe au groupe d'holonomie de la connexion en un point quelconque de la fibre de $E_C(V_m)$ au-dessus de x .

CHAPITRE II.

II-STRUCTURES

Dans ce chapitre, nous nous proposons essentiellement, après avoir défini ce que nous entendons par Π -structure sur une variété différentiable, de généraliser à de telles structures des propriétés classiques des structures presque complexes.

Un premier groupe de propriétés (intégrabilité, étude de certains opérateurs sur les formes extérieures) fait intervenir le *tenseur de torsion* associé à une Π -structure. Un second groupe concerne les Π -connexions, qui généralisent les connexions presque complexes de A. Lichnerowicz. Le théorème du paragraphe 6, *B*, établit d'ailleurs un lien entre ces deux groupes.

1 - Définition des Π -structures.

Soit V_m une variété différentiable (de classe C^∞) de dimension m . Nous désignerons par T_x l'espace vectoriel tangent au point $x \in V_m$, par T_x^C son complexifié.

Une Π -structure (ou structure de *presque-produit complexe* dans la terminologie de D. C. Spencer [26]) est définie sur V_m par la donnée de deux champs, de classe C^∞ , de sous-espaces propres ⁽¹⁾ supplémentaires de T_x^C , T_1 et T_2 . Nous poserons $n_1 = \dim. T_1$, $n_2 = \dim. T_2$; on a $n_1 + n_2 = m$, $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$.

Tout vecteur v de T_x^C est la somme d'un vecteur $P_1 v \in T_1$ et d'un vecteur $P_2 v \in T_2$. λ étant une constante complexe non nulle ⁽²⁾, posons

$$(1) \quad \mathbb{T} v = \lambda (P_1 v - P_2 v).$$

Nous définissons ainsi sur l'espace vectoriel complexe T_x^C un opérateur linéaire $\mathbb{T}$, tel que

$$(2) \quad \mathbb{T}^2 = \lambda^2 \text{ (Identité).}$$

À cet opérateur correspond un tenseur complexe (F_j^i) (i et tout indice minuscule latin $= 1, \dots, m$) défini par $(\mathbb{T} v)^i = F_j^i v^j$. La relation (2) se traduit par

$$(2') \quad F_h^i F_j^h = \lambda^2 \delta_j^i,$$

où δ_j^i est le symbole de Kronecker.

Inversement supposons donné sur une variété différentiable V_m un champ de tenseurs (F_j^i) , de classe C^∞ , satisfaisant à (2') en chaque point de V_m . Nous écartons le cas où F_j^i est proportionnel au tenseur de Kronecker δ_j^i . En un point $x \in V_m$ l'opérateur linéaire sur T_x^C défini par le tenseur (F_j^i) a pour valeurs propres λ et $-\lambda$. Soit T_1 (resp. T_2) le sous-espace de T_x^C engendré par les vecteurs propres correspondant à la valeur propre λ (resp. $-\lambda$). v étant un vecteur quelconque de T_x^C , $v_1 = v + \frac{1}{\lambda} \mathbb{T} v$ est un vecteur de T_1 , $v_2 = v - \frac{1}{\lambda} \mathbb{T} v$

(1) Nous disons qu'un sous-espace d'un espace vectoriel est propre s'il n'est pas réduit à l'élément neutre et si son complémentaire n'est pas vide.

(2) Nous aurions pu prendre systématiquement $\lambda = 1$. Nous avons conservé une constante λ pour pouvoir choisir un opérateur $\mathbb{T}$ réel (c'est-à-dire laissant T_x invariant) dans le cas où, m étant pair, T_1 et T_2 sont complexes conjugués. V_m est alors douée d'une structure presque complexe et, en prenant $\lambda = i$, nous retrouvons la définition habituelle de l'opérateur associé à une telle structure.

est un vecteur de T_2 ; et $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Donc T_1 et T_2 sont supplémentaires. V_m est ainsi douée d'une Π -structure.

2 - Bases adaptées.

Étant donnée une variété différentiable V_m munie d'une Π -structure, nous appellerons *base adaptée* relative à x une base (e_i) de T_x^C telle que $e_\alpha \in T_1$, $e_A \in T_2$ (α et tout indice grec $= 1, \dots, n_1$; A et tout indice majuscule latin $= n_1 + 1, \dots, m$).

Par rapport à une telle base le tenseur associé à Π a pour composantes

$$(3) \quad F_\beta^\alpha = \lambda \delta_\beta^\alpha, \quad F_A^\alpha = F_\alpha^A = 0, \quad F_B^A = -\lambda \delta_B^A.$$

Si (e_i) est une base adaptée relative à x , toute autre base adaptée relative à ce même point peut être définie par $e_{\beta'} = A_{\beta'}^\alpha e_\alpha$, $e_{B'} = A_{B'}^A e_A$, où $(A_{\beta'}^\alpha)$ [resp. $(A_{B'}^A)$] est une matrice régulière $n_1 \times n_1$ (resp. $n_2 \times n_2$). Soient $E_\Pi(V_m)$ l'ensemble des bases adaptées relatives aux différents points de V_m et p l'application $E_\Pi(V_m) \ni V_m$ qui, à une base relative à x , fait correspondre le point x lui-même. $E_\Pi(V_m)$ a, par rapport à p , une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_m , dont le groupe structural est le sous-groupe $G(n_1, n_2)$ de $GL(m, C)$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $A \in GL(n_1, C)$, $B \in GL(n_2, C)$. $G(n_1, n_2)$ est isomorphe à $GL(n_1, C) \times GL(n_2, C)$.

3 - Torsion d'une Π -structure. Intégrabilité.

A. Considérons un recouvrement de la variété différentiable V_m douée d'une Π -structure par des ouverts munis chacun d'une section locale, de classe C^∞ , de $E_\Pi(V_m)$. La section locale au-dessus de l'ouvert U associe à chaque point $x \in U$ une base adaptée (e_i) dont nous désignons par (θ^i) la cobase duale. Posons

$$(4) \quad d\theta^i = \frac{1}{2} c_j^i{}_k \theta^j \wedge \theta^k$$

avec

$$c_j^i{}_k + c_k^i{}_j = 0.$$

Soit U' un autre ouvert du recouvrement; $(\theta^{i'})$ et $c_j^{i'}{}_{k'}$ sont définis de façon analogue pour la section locale au-dessus de U' . Si U et U' ont une intersection non vide, en chaque point $x \in U \cap U'$ il existe des matrices $(A_{\beta'}^\alpha) \in GL(n_1, C)$,

$(A_{B'}^A) \in GL(n_2, C)$, telles que $\theta^\alpha = A_{\beta'}^\alpha \theta^{\beta'}$, $\theta^A = A_{B'}^A \theta^{B'}$. Nous écrirons, en posant $A_{B'}^\alpha = A_{\beta'}^A = 0$,

$$\theta^i = A_{j'}^i \theta^{j'},$$

d'où

$$d\theta^i = dA_{j'}^i \wedge \theta^{j'} + A_{j'}^i d\theta^{j'}$$

ou

$$\frac{1}{2} c_{j \ k}^i \theta^j \wedge \theta^k = dA_{j'}^i \wedge \theta^{j'} + \frac{1}{2} A_{j'}^i c_{k' \ l'}^{j'} \theta^{k'} \wedge \theta^{l'}.$$

On en déduit en particulier

$$(5) \quad \begin{cases} c_{B \ C}^\alpha A_{L'}^B A_{M'}^C = A_{\beta'}^\alpha c_{L' \ M'}^{\beta'}, \\ c_{\beta \ \gamma}^A A_{\lambda'}^\beta A_{\mu'}^\gamma = A_{B'}^A c_{\lambda' \ \mu'}^{B'}. \end{cases}$$

Soit $(A_\alpha^{\beta'})$ [resp. $(A_A^{B'})$] la matrice inverse de $(A_{\beta'}^\alpha)$ [resp. $(A_{B'}^A)$]. (5) équivaut à

$$(6) \quad \begin{cases} c_{L' \ M'}^{\beta'} = A_\alpha^{\beta'} A_{L'}^B A_{M'}^C c_{B \ C}^\alpha, \\ c_{\lambda' \ \mu'}^{B'} = A_A^{B'} A_{\lambda'}^\beta A_{\mu'}^\gamma c_{\beta \ \gamma}^A. \end{cases}$$

Posons $t_{j \ k}^\alpha = 0$ pour j ou $k \leq n_1$, $t_{j \ k}^A = 0$ pour j ou $k > n_1$, $t_{B \ C}^\alpha = c_{B \ C}^\alpha$, $t_{\beta \ \gamma}^A = c_{\beta \ \gamma}^A$. On voit que les $(t_{j \ k}^i)$ sont les composantes d'un tenseur une fois contravariant, deux fois covariant. Nous l'appelons *tenseur de torsion* de la II-structure. La 2-forme vectorielle associée, définie par $T^i = \frac{1}{2} t_{j \ k}^i \theta^j \wedge \theta^k$, est la *forme de torsion*.

B. Nous dirons qu'une II-structure sur V_m est *intégrable* si les champs de sous-espaces T_1 et T_2 sont intégrables: au voisinage de chaque point de V_m , le sous-espace T_1 (resp. T_2) peut être défini par $dz^A = 0$ (resp. $dz^\alpha = 0$), où les (z^i) sont m fonctions à valeurs complexes de classe C^∞ . On peut alors dans la formule (4) prendre $\theta^i = dz^i$. On en déduit que le tenseur de torsion est nul.

Inversement supposons donnée sur V_m une II-structure dont le tenseur de torsion soit nul. La formule (4) s'écrit, pour $i \leq n_1$,

$$(7) \quad d\theta^\alpha = \frac{1}{2} c_{\beta \ \gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma + c_{\beta \ C}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^C.$$

On peut alors dire, selon la terminologie employée par E. Cartan [4], que $d\theta^\alpha$ appartient à l'anneau déterminé par les formes $\theta^1, \dots, \theta^{n_1}$. De même $d\theta^A$ appartient à l'anneau déterminé par les formes $\theta^{n_1+1}, \dots, \theta^m$.

Supposons V_m analytique réelle et la II-structure de classe C^0 : la partie réelle et la partie imaginaire de F_j^i sont des fonctions analytiques réelles des coordonnées locales x^i . T_2 peut être défini localement par le système différentiel

$$(F_j^i + \lambda \delta_j^i) dx^j = 0.$$

Ce système doit être de rang n_1 . Il est donc équivalent à un système comportant n_1 équations

$$(8) \quad B_i^\alpha dx^i = 0,$$

où la partie réelle et la partie imaginaire de B_i^α sont des fonctions analytiques réelles des x^i . De même T_1 peut être défini localement par un système différentiel comportant n_2 équations

$$(9) \quad B_i^A dx^i = 0,$$

où la partie réelle et la partie imaginaire de B_i^A sont des fonctions analytiques réelles des x^i . Pour définir une section locale de $E_\Pi(V_m)$ on peut choisir

$$\theta^\alpha = B_i^\alpha dx^i, \quad \theta^A = B_i^A dx^i.$$

On voit alors que les conditions de complète intégrabilité de Frobenius sont vérifiées pour chacun des systèmes (8) et (9). On en déduit qu'il existe localement n_1 fonctions (z^α) [resp. n_2 fonctions (z^A)] complexes de classe C^ω , telles que (8) [resp. (9)] soit équivalent à $dz^\alpha = 0$ (resp. $dz^A = 0$). La II-structure est donc intégrable.

On peut penser que la nullité de la torsion reste une condition suffisante pour l'intégrabilité, lorsqu'on ne suppose plus les données analytiques, mais les considérations précédentes ne permettent plus de l'affirmer, la démonstration du théorème de Frobenius étant alors en défaut.

4 - Opérateurs C et M sur les formes. Relation fondamentale.

Soit V_m une variété différentiable munie d'une II-structure. Désignons par $\Lambda_r^C(V_m)$ l'espace vectoriel des r -formes extérieures à valeurs complexes définies sur V_m . Nous associerons à la II-structure deux opérateurs linéaires C et M définis sur $\Lambda_r^C(V_m)$, coïncidant avec ceux de A. Lichnerowicz [22] dans le cas presque complexe ⁽¹⁾. $v_1, \dots, v_r$ étant r vecteurs de T_x^C et φ une r -forme, re-

⁽¹⁾ Précisons que l'opérateur C de A. Lichnerowicz est le produit de celui de P. Libermann [20] par $(-1)^r$ (Identité) et le produit de celui de H. Guggenheimer [12] par $(-1)^r \tau$, où τ est l'opérateur de complexe conjugaison. Il coïncide, dans le cas d'une structure presque complexe induite par une structure analytique complexe, avec celui de A. Weil [28].

présentons par $\varphi(v_1, \dots, v_r)$ la valeur de φ pour $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$. C et M sont déterminés par les relations

$$C\varphi(v_1, \dots, v_r) = \varphi(\mathbb{I} v_1, \dots, \mathbb{I} v_r),$$

$$M\varphi(v_1, \dots, v_r) = \sum_{k=1}^{k=r} \varphi(v_1, \dots, v_{k-1}, \mathbb{I} v_k, v_{k+1}, \dots, v_r),$$

quels que soient $v_1, \dots, v_r$.

Soient $(\varphi_{i_1 \dots i_r})$ les composantes de φ par rapport à une base déterminée au point x . Celles de $C\varphi$ et $M\varphi$ sont

$$(10) \quad \begin{cases} (C\varphi)_{i_1 \dots i_r} = F_{i_1}^{j_1} \dots F_{i_r}^{j_r} \varphi_{j_1 \dots j_r}, \\ (M\varphi)_{i_1 \dots i_r} = \sum_{k=1}^{k=r} F_{i_k}^{h_k} \varphi_{i_1 \dots i_{k-1} h_{k+1} \dots i_r} = \frac{1}{(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} F_{j_1}^{h_1} \varphi_{h_2 \dots j_r}, \end{cases}$$

où $\varepsilon_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ représente le tenseur indicateur de Kronecker.

(θ^i) étant, au point x , la cobase duale de la base adaptée (e_i) , nous dirons que la r -forme

$$\varphi = \frac{1}{r!} \varphi_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}$$

est *pure de type* (p, q) ($p + q = r$), si les seuls termes non nuls qui figurent dans l'expression de φ sont de degré p (resp. q) par rapport aux (θ^a) [resp. (θ^A)]. Cette définition est indépendante du choix de la base adaptée (e_i) en chaque point de V_m . Les formules (10) montrent que C et M transforment une forme pure $\varphi_{p,q}$ de type (p, q) en une forme pure de même type

$$(11) \quad \begin{cases} C\varphi_{p,q} = (-1)^q \lambda^{p+q} \varphi_{p,q}, \\ M\varphi_{p,q} = \lambda(p-q) \varphi_{p,q}. \end{cases}$$

Il résulte de (11) que $CM\varphi_{p,q} = MC\varphi_{p,q}$. Comme toute forme est décomposable en somme de formes pures, on en déduit que C et M commutent.

À la forme de torsion T nous attachons un opérateur linéaire $K(T)$ sur les formes, faisant correspondre à la r -forme φ la $(r+1)$ -forme de composantes

$$(12) \quad [K(T)\varphi]_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{1}{2(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+1}}^{j_1 \dots j_r} t_{j_1}^{i_1} \varphi_{i_2 \dots j_r}.$$

Nous allons montrer que, pour toute forme φ , on a la relation

$$(13) \quad Cd\varphi + dCM\varphi - MdC\varphi = 4CK(T)\varphi.$$

Nous l'appellerons la *relation fondamentale*.

Les deux membres étant linéaires par rapport à φ , il suffit d'établir la relation pour une forme pure. Considérons donc une r -forme pure de type (p, q)

$$\varphi = \frac{1}{p!q!} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p A_1 \dots A_q} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_p} \wedge \theta^{A_1} \wedge \dots \wedge \theta^{A_q}.$$

Sa différentielle extérieure peut s'écrire

$$d\varphi = \psi_{p+1, q} + \psi_{p, q+1} + \psi_{p-1, q+2} + \psi_{p+2, q-1},$$

où les formes qui figurent au second membre sont des formes pures dont les types sont désignés en indice. En particulier

$$(14) \quad \begin{cases} \psi_{p-1, q+2} = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{(-1)^{k-1}}{2p!q!} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p A_1 \dots A_q} t_B^{\alpha_k} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_{k-1}} \wedge \theta^B \wedge \theta^C \wedge \theta^{\alpha_{k+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_p} \wedge \theta^{A_1} \wedge \dots \wedge \theta^{A_q}, \\ \psi_{p+2, q-1} = \sum_{k=1}^{k=q} \frac{(-1)^{p+k-1}}{2p!q!} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p A_1 \dots A_q} t_\beta^{A_k} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_p} \wedge \theta^{A_1} \wedge \dots \wedge \theta^{A_{k-1}} \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\gamma \wedge \theta^{A_{k+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{A_q}. \end{cases}$$

Des formules (11) on déduit

$$Cd\varphi = (-1)^q \lambda^{r+1} \psi_{p+1, q} + (-1)^{q+1} \lambda^{r+1} \psi_{p, q+1} + (-1)^q \lambda^{r+1} \psi_{p-1, q+2} + (-1)^{q-1} \lambda^{r+1} \psi_{p+2, q-1},$$

$$dCM\varphi = (-1)^q \lambda^{r+1} (p-q) (\psi_{p+1, q} + \psi_{p, q+1} + \psi_{p-1, q+2} + \psi_{p+2, q-1}),$$

$$dC\varphi = (-1)^q \lambda^r (\psi_{p+1, q} + \psi_{p, q+1} + \psi_{p-1, q+2} + \psi_{p+2, q-1}),$$

$$MdC\varphi = (-1)^q \lambda^{r+1} [(p+1-q) \psi_{p+1, q} + (p-q-1) \psi_{p, q+1} + (p-q-3) \psi_{p-1, q+2} + (p-q+3) \psi_{p+2, q-1}],$$

d'où

$$(15) \quad Cd\varphi + dCM\varphi - MdC\varphi = (-1)^q \lambda^{r+1} (4\psi_{p-1, q+2} - 4\psi_{p+2, q-1}).$$

Or les formules (14) montrent que

$$(\psi_{p-1, q+2})_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} A_1 \dots A_{q+2}} = \frac{1}{2(p-1)!q!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} A_1 \dots A_{q+2}}^{BC\beta_2 \dots \beta_p B_1 \dots B_q} t_B^{\beta_1} \varphi_{\beta_1 \dots \beta_p B_1 \dots B_q},$$

$$(\psi_{p+2, q-1})_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+2} A_1 \dots A_{q-1}} = \frac{1}{2p!(q-1)!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+2} A_1 \dots A_{q-1}}^{\beta\gamma\beta_1 \dots \beta_p B_2 \dots B_q} t_{\beta\gamma}^{B_1} \varphi_{\beta_1 \beta_1 \dots \beta_p B_2 \dots B_q},$$

les composantes des autres types étant nulles. On en déduit

$$\psi_{p-1, q-2} + \psi_{p+2, q-1} = K(T)\varphi.$$

En faisant opérer C sur les deux membres, on obtient

$$(-1)^q \lambda^{r+1} (\psi_{p-1, q+2} - \psi_{p+2, q-1}) = CK(T)\varphi.$$

La relation fondamentale se déduit alors immédiatement de (15).

5. Applications de la relation fondamentale.

Dans le cas $r = 1$, la relation fondamentale a été établie pour les structures presque complexes par A. Lichnerowicz [22], qui l'a utilisée d'une part pour expliciter les composantes du tenseur de torsion en coordonnées locales, d'autre part pour relier la torsion aux crochets de certains champs de vecteurs. Nous allons voir que les mêmes considérations sont applicables aux Π -structures.

En outre nous nous servirons de la relation fondamentale pour étudier l'opérateur sur les formes $d\tilde{d} + \tilde{d}d$, où $\tilde{d} = C^{-1}dC$, et énoncer une condition nécessaire et suffisante de nullité de la torsion, connue dans le cas presque complexe, faisant intervenir cet opérateur.

A. Composantes du tenseur de torsion en coordonnées locales. Étudions d'abord ce que devient la relation fondamentale pour une 1-forme φ . Une telle forme est la somme de deux formes pures, de types (1, 0) et (0, 1). On en déduit

$$CM\varphi = \lambda^2\varphi.$$

De même, $K(T)\varphi$ étant la somme de deux formes pures, de types (2, 0) et (0, 2), on a

$$CK(T)\varphi = \lambda^2 K(T)\varphi.$$

La relation fondamentale devient alors

$$(16) \quad Cd\varphi + \lambda^2 d\varphi - MdC\varphi = 4\lambda^2 K(T)\varphi.$$

Prenons un système de coordonnées locales (x^i) . La 1-forme φ étant définie par

$$\varphi = \varphi_i dx^i,$$

explicitons les composantes des formes qui figurent dans la relation (16). Nous représenterons par le symbole ∂_j l'opérateur dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x^j}$. On a

$$(d\varphi)_{jk} = \partial_j \varphi_k - \partial_k \varphi_j,$$

$$(Cd\varphi)_{jk} = F_j^l F_k^m (\partial_l \varphi_m - \partial_m \varphi_l),$$

$$(dC\varphi)_{jk} = \partial_j (F_k^m \varphi_m) - \partial_k (F_j^m \varphi_m),$$

$$(MdC\varphi)_{jk} = F_j^l [\partial_l (F_k^m \varphi_m) - \partial_k (F_l^m \varphi_m)] - F_k^l [\partial_l (F_j^m \varphi_m) - \partial_j (F_l^m \varphi_m)].$$

En tenant compte de la relation $F_j' F_l'' = \lambda^2 \delta_j^m$, on peut écrire

$$(MdC\varphi)_{jk} = F_j' F_k^m \partial_l \varphi_m - F_k' F_j^m \partial_l \varphi_m - \lambda^2 (\partial_k \varphi_j - \partial_j \varphi_k) \\ + [F_j' (\partial_l F_k^m - \partial_k F_l^m) - F_k' (\partial_l F_j^m - \partial_j F_l^m)] \varphi_m,$$

d'où

$$(\lambda^2 d\varphi + Cd\varphi - MdC\varphi)_{jk} = [F_k' (\partial_l F_j'' - \partial_j F_l''') - F_j' (\partial_l F_k''' - \partial_k F_l''')] \varphi_m.$$

Or

$$[K(T)\varphi]_{jk} = t_{jk}^m \varphi_m.$$

La relation (16) ayant lieu quelle que soit la forme φ , on en déduit ⁽¹⁾

$$(17) \quad t_{jk}^i = \frac{1}{4\lambda^2} [F_k' (\partial_l F_j^i - \partial_j F_l^i) - F_j' (\partial_l F_k^i - \partial_k F_l^i)].$$

Dans le cas presque complexe ($\lambda^2 = -1$) on retrouve la définition du tenseur de torsion donnée par B. Eckmann dans [9] ⁽²⁾.

B. Relation entre la torsion et les crochets de certains champs de vecteurs.

La relation (16), où φ est une 1-forme quelconque, exprime une égalité entre des 2-formes. Étant donnés deux champs de vecteurs u et v , les valeurs prises pour $u \wedge v$ par ces 2-formes doivent être les mêmes. Nous allons les expliciter. Dans un système de coordonnées locales on a

$$d\varphi(u, v) = (\partial_j \varphi_k - \partial_k \varphi_j) u^j v^k = u^j \partial_j (\varphi_k v^k) - v^j \partial_j (\varphi_k u^k) - \varphi_k (u^j \partial_j v^k - v^j \partial_j u^k).$$

X étant un vecteur et f une fonction, nous emploierons la notation X, f pour désigner la transformée infinitésimale de f par X . La formule précédente s'écrit, en introduisant le crochet des champs de vecteurs u et v ,

$$d\varphi(u, v) = u \cdot \varphi(v) - v \cdot \varphi(u) - \varphi([u, v]).$$

On en déduit

$$Cd\varphi(u, v) = d\varphi(\mathbb{I}u, \mathbb{I}v) = (\mathbb{I}u) \cdot \varphi(\mathbb{I}v) - (\mathbb{I}v) \cdot \varphi(\mathbb{I}u) - \varphi([\mathbb{I}u, \mathbb{I}v]),$$

$$dC\varphi(u, v) = u \cdot C\varphi(v) - v \cdot C\varphi(u) - C\varphi([u, v]) \\ = u \cdot \varphi(\mathbb{I}v) - v \cdot \varphi(\mathbb{I}u) - \varphi(\mathbb{I}[u, v]),$$

$$MdC\varphi(u, v) = dC\varphi(\mathbb{I}u, v) + dC\varphi(u, \mathbb{I}v) \\ = \mathbb{I}u \cdot \varphi(\mathbb{I}v) - \lambda^2 v \cdot \varphi(u) - \varphi(\mathbb{I}[\mathbb{I}u, v]) + \lambda^2 u \cdot \varphi(v) - \mathbb{I}v \cdot \varphi(\mathbb{I}u) \\ - \varphi(\mathbb{I}[u, \mathbb{I}v]).$$

⁽¹⁾ Dans tout ce calcul et, par suite, dans la formule (17) on peut remplacer les dérivées partielles ∂_j par les dérivées covariantes ∇_j par rapport à une connexion linéaire (réelle ou complexe) sans torsion. On fait ainsi apparaître le caractère tensoriel de t_{jk}^i .

⁽²⁾ Le tenseur de torsion défini par A. Frölicher [10] est l'opposé de celui-ci.

La valeur prise pour $u \wedge v$ par le premier membre de (16) est donc

$$(18) \quad -\lambda^2 \varphi([u, v]) - \varphi(\mathbb{I}u, \mathbb{I}v) + \varphi(\mathbb{I}[u, v]) + \varphi(\mathbb{I}u, \mathbb{I}v).$$

La valeur prise par le second membre est

$$(19) \quad 4\lambda^2 \varphi(T(u, v)),$$

où $T(u, v)$ est le vecteur de composantes $(T(u, v))^i = t_j^i u^j v^k$.

Les valeurs (18) et (19) devant être les mêmes quelle que soit φ , on en déduit

$$(20) \quad \lambda^2[u, v] + [\mathbb{I}u, \mathbb{I}v] - \mathbb{I}[\mathbb{I}u, v] + \mathbb{I}[\mathbb{I}v, u] = -4\lambda^2 T(u, v).$$

Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que la Π -structure soit sans torsion est que le premier membre de (20) soit nul pour tous champs de vecteurs u, v .

Dans le cas presque complexe on retrouve la formule obtenue par B. Eckmann dans [9], en observant que le crochet de deux champs de vecteurs défini par cet auteur est l'opposé de celui que nous avons introduit.

C. Étude de l'opérateur $d\tilde{d} + \tilde{d}d$. Soit φ une r -forme. La relation fondamentale appliquée à la forme $C\varphi$ s'écrit

$$CdC\varphi + dCMC\varphi - MdC^2\varphi = 4CK(T)C\varphi.$$

Or

$$C^2\varphi = \lambda^{2r}\varphi,$$

$$CdC\varphi = \lambda^{2(r+1)}C^{-1}dC\varphi.$$

Si on pose $\tilde{d} = C^{-1}dC$, on obtient

$$(21) \quad \lambda^{2(r+1)}\tilde{d}\varphi + \lambda^{2r}dM\varphi - \lambda^{2r}Md\varphi = 4CK(T)C\varphi.$$

On en déduit

$$\lambda^{2(r+1)}d\tilde{d}\varphi - \lambda^{2r}dMd\varphi = 4dCK(T)C\varphi$$

et

$$\lambda^{2(r+2)}\tilde{d}d\varphi + \lambda^{2(r+1)}dMd\varphi = 4CK(T)Cd\varphi.$$

Par suite

$$(22) \quad \lambda^{2(r+2)}(d\tilde{d} + \tilde{d}d)\varphi = 4[\lambda^2 dCK(T)C\varphi + CK(T)Cd\varphi].$$

Supposons la Π -structure sans torsion. La relation (22) montre que $(d\bar{d} + \bar{d}d)\varphi$ est alors nul quelle que soit la forme φ . Nous allons établir la réciproque: si $(d\bar{d} + \bar{d}d)\varphi$ est nul pour toute forme φ d'un degré donné $r \leq m - 2$, la torsion est nulle en tout point. Pour cela explicitons les composantes des formes qui figurent au second membre de (22). On a d'abord

$$[K(T)C\varphi]_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{1}{2(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+1}}^{jki_2 \dots i_r} t_{j \ k}^{i_1} F_{i_1}^{h_1} \dots F_{i_r}^{h_r} \varphi_{h_1 \dots h_r},$$

$$[CK(T)C\varphi]_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{1}{2(r-1)!} F_{i_1}^{m_1} \dots F_{i_{r+1}}^{m_{r+1}} \varepsilon_{m_1 \dots m_{r+1}}^{jki_2 \dots i_r} t_{j \ k}^{i_1} F_{i_1}^{h_1} \dots F_{i_r}^{h_r} \varphi_{h_1 \dots h_r}.$$

Nous transformerons le second membre en observant que

$$F_{i_1}^{m_1} \dots F_{i_{r+1}}^{m_{r+1}} \varepsilon_{m_1 \dots m_{r+1}}^{jki_2 \dots i_r} F_{i_2}^{i_2} \dots F_{i_r}^{i_r} = \lambda^{2(r-1)} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+1}}^{pqh_2 \dots h_r} F_p^j F_q^k.$$

Pour démontrer cette relation, qui exprime l'égalité de deux tenseurs, on peut supposer qu'on a choisi une base adaptée. Alors $F_\beta^\alpha = \lambda \delta_\beta^\alpha$, $F_\alpha^A = F_A^\alpha = 0$, $F_B^A = -\lambda \delta_B^A$. On en déduit que le premier membre a pour valeur

$$(-1)^s \lambda^{2r} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+1}}^{jkh_2 \dots h_r},$$

où s est un entier pair si j et k sont tous deux $\leq n_1$, ou tous deux $> n_1$, et impair dans les autres cas; c'est bien aussi la valeur prise par le second membre.

On a donc

$$[CK(T)C\varphi]_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{\lambda^{2(r-1)}}{2(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+1}}^{pqh_2 \dots h_r} F_p^j F_q^k t_{j \ k}^{i_1} F_{i_1}^{h_1} \varphi_{h_1 \dots h_r}.$$

Or on déduit de la relation (20) que pour tout couple de vecteurs u, v

$$T(\mathbb{I}u, \mathbb{I}v) = \lambda^2 T(u, v).$$

Donc

$$t_{j \ k}^{i_1} F_p^j F_q^k = \lambda^2 t_{p \ q}^{i_1}.$$

Par suite

$$(23) \quad [CK(T)C\varphi]_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{\lambda^{2r}}{2(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+1}}^{pqh_2 \dots h_r} t_{p \ q}^{i_1} F_{i_1}^{h_1} \varphi_{h_1 \dots h_r}.$$

Désignons par $K(\mathbb{I}T)$ l'opérateur linéaire sur les formes qui fait correspondre à la r -forme φ la $(r+1)$ -forme de composantes

$$[K(\mathbb{I}T)\varphi]_{i_1 \dots i_{r+1}} = \frac{1}{2(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+1}}^{pqh_2 \dots h_r} F_{i_1}^{h_1} t_{p \ q}^i \varphi_{h_1 \dots h_r}.$$

Avec cette notation, (23) se traduit par

$$CK(T)C\varphi = \lambda^{2r} K(\mathbb{I} T)\varphi.$$

On en déduit

$$CK(T)Cd\varphi = \lambda^{2(r+1)} K(\mathbb{I} T)d\varphi.$$

En portant dans la relation (22), on obtient alors

$$(24) \quad (d\tilde{d} + \tilde{d}d)\varphi = \frac{4}{\lambda^2} [dK(\mathbb{I} T)\varphi + K(\mathbb{I} T)d\varphi].$$

Prenons un système de coordonnées locales (x^i) . Les composantes des formes qui figurent au second membre de (24) sont

$$\begin{aligned} [dK(\mathbb{I} T)\varphi]_{i_1 \dots i_{r+2}} &= \frac{1}{(r+1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{m m_1 \dots m_{r+1}} \partial_m [K(\mathbb{I} T)\varphi]_{m_1 \dots m_{r+1}} \\ &= \frac{1}{2(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{m j k h_2 \dots h_r} \partial_m (F_i^{h_1} t_{j k}^i \varphi_{h_1 \dots h_r}), \\ [K(\mathbb{I} T)d\varphi]_{i_1 \dots i_{r+2}} &= \frac{1}{2r!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{j k h_1 \dots h_r} F_i^h t_{j k}^i (d\varphi)_{h h_1 \dots h_r} \\ &= \frac{1}{2(r!)^2} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{j k h_1 \dots h_r} F_i^h t_{j k}^i \varepsilon_{h h_1 \dots h_r}^{m m_1 \dots m_r} \partial_m \varphi_{m_1 \dots m_r}. \end{aligned}$$

On peut calculer le second membre en faisant d'abord $m = h$, puis $m = h_1, \dots, m = h_r$, ce qui conduit à r termes égaux. On obtient

$$\begin{aligned} [K(\mathbb{I} T)d\varphi]_{i_1 \dots i_{r+2}} &= \frac{1}{2r!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{j k h_1 \dots h_r} F_i^h t_{j k}^i \partial_h \varphi_{h_1 \dots h_r} \\ &\quad - \frac{1}{2(r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{j k m h_2 \dots h_r} F_i^h t_{j k}^i \partial_m \varphi_{h h_2 \dots h_r}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (25) \quad [(d\tilde{d} + \tilde{d}d)\varphi]_{i_1 \dots i_{r+2}} &= \frac{2}{\lambda^2 (r-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{m j k h_2 \dots h_r} \partial_m (F_i^{h_1} t_{j k}^i) \varphi_{h_1 \dots h_r} \\ &\quad + \frac{2}{\lambda^2 r!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{r+2}}^{j k h_1 \dots h_r} F_i^h t_{j k}^i \partial_h \varphi_{h_1 \dots h_r}. \end{aligned}$$

Soit x_0 un point du domaine $(\mathfrak{D})$ rapporté au système de coordonnées locales (x^i) . On peut trouver une forme φ de classe C^∞ , définie sur V_m , dont les composantes dans le système (x^i) satisfont, au point x_0 , aux conditions

$$(26) \quad \varphi_{h_1 \dots h_r} = 0, \quad \partial_h \varphi_{h_1 \dots h_r} = \varepsilon_{h_1 \dots h_r}^{s_1 \dots s_r} \delta_h^{s_r},$$

où $s_1, \dots, s_r, s$ sont des entiers arbitraires compris entre 1 et m ⁽¹⁾; nous supposons $s_1, \dots, s_r$ distincts. Appliquons à une telle forme la relation (25) écrite au point x_0

$$[d\tilde{d} + \tilde{d}d]\varphi]_{l_1 \dots l_{r+2}} = \frac{2}{\lambda^2} \varepsilon_{l_1 \dots l_{r+2}}^{jks_1 \dots s_r} F_i^s t_j^i k.$$

Par hypothèse le premier membre est nul quels que soient $l_1, \dots, l_{r+2}$. On peut prendre en particulier $l_1 = s_1, \dots, l_r = s_r$. On en déduit que, pour tout couple (j, k) d'indices distincts de $s_1, \dots, s_r$,

$$F_i^s t_j^i k = 0.$$

Comme $s_1, \dots, s_r$ et s sont arbitraires, cette relation a lieu quels que soient s, j, k . Il en résulte que

$$t_j^i k = 0,$$

quels que soient i, j, k . Cette égalité devant avoir lieu pour tout point x_0 de V_m , la Π -structure est sans torsion.

Nous énoncerons ⁽²⁾

THÉORÈME. *Pour qu'une Π -structure soit sans torsion, il faut et il suffit que $(d\tilde{d} + \tilde{d}d)\varphi$ soit nul pour toute forme φ de classe C^∞ , définie sur V_m , d'un degré donné $r \leq m - 2$.*

6 - Π -connexions. Groupes d'holonomie.

A. Soit V_m une variété différentiable munie d'une Π -structure. Nous appellerons Π -connexion toute connexion infinitésimale définie sur l'espace fibré des bases adaptées $E_\Pi(V_m)$.

$E_\Pi(V_m)$ peut être considéré comme un sous-espace de l'espace $E_C(V_m)$ des bases complexes. Une Π -connexion détermine canoniquement une connexion linéaire complexe avec laquelle nous l'identifierons. Inversement donnons-nous

⁽¹⁾ On peut par exemple déterminer une telle forme φ de la façon suivante. a et b étant deux nombres positifs suffisamment petits ($a < b$), soient (Δ) , resp. (Δ') , les domaines contenus dans $(\mathfrak{D})$ définis par $-a < x^i - x_0^i < a$, resp. $-b < x^i - x_0^i < b$ ($i = 1, \dots, m$). Il existe une fonction f de classe C^∞ , définie dans $(\mathfrak{D})$, égale à 1 dans (Δ) et nulle à l'extérieur de (Δ') (cf. [27], p. 25). Il suffit alors de prendre en chaque point de $(\mathfrak{D})$ $\varphi_{h_1 \dots h_r} = \varepsilon_{h_1 \dots h_r}^{s_1 \dots s_r} (x^s - x_0^s) f$ et dans le complémentaire de $(\mathfrak{D})$ $\varphi = 0$.

⁽²⁾ Pour le cas presque complexe, cf. H. Guggenheimer [12] (note au cas de la page 168) et W. V. D. Hodge [13].

une connexion linéaire complexe. Considérons un recouvrement de V_m par des ouverts munis chacun d'une section locale de $E_{\Pi}(V_m)$. La connexion peut être définie par une forme locale sur chaque ouvert, à valeurs dans l'algèbre de Lie de $GL(m, \mathbb{C})$, représentée par une matrice (π_j^i) dont les éléments sont des formes de Pfaff locales (à valeurs complexes): nous dirons que (π_j^i) définit la connexion relativement aux bases adaptées de la section locale envisagée. Pour que la connexion donnée puisse être identifiée à une Π -connexion, il faut et il suffit que (π_j^i) appartienne à l'algèbre de Lie du groupe structural $G(n_1, n_2)$ de $E_{\Pi}(V_m)$, c'est-à-dire que

$$(27) \quad \pi_A^\alpha = 0, \quad \pi_\alpha^A = 0.$$

On peut mettre cette condition sous une autre forme en introduisant la différentielle absolue du tenseur (F_j^i) par rapport à la connexion (π_j^i) . On a

$$\nabla F_\beta^\alpha = \pi_h^\alpha F_\beta^h - \pi_\beta^h F_h^\alpha = \lambda \pi_\beta^\alpha - \lambda \pi_\beta^\alpha = 0,$$

$$\nabla F_A^\alpha = \pi_h^\alpha F_A^h - \pi_A^h F_h^\alpha = -2\lambda \pi_\alpha^\alpha,$$

$$\nabla F_\alpha^A = \pi_h^A F_\alpha^h - \pi_\alpha^h F_h^A = 2\lambda \pi_\alpha^A,$$

$$\nabla F_B^A = \pi_h^A F_B^h - \pi_B^h F_h^A = -\lambda \pi_B^A + \lambda \pi_B^A = 0.$$

(27) équivaut à $\nabla F_j^i = 0$. Nous énoncerons

THÉORÈME. *Pour qu'une connexion linéaire complexe puisse être identifiée à une Π -connexion, il faut et il suffit que le tenseur (F_j^i) soit à différentielle absolue nulle.*

Étant donnée une connexion linéaire complexe, définie relativement à des bases adaptées par (ω_j^i) , les formes

$$\pi_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha, \quad \pi_B^A = \omega_B^A,$$

$$\pi_A^\alpha = 0, \quad \pi_\alpha^A = 0$$

définissent encore une connexion linéaire complexe, qu'on peut identifier à une Π -connexion. Nous dirons que cette dernière est *induite* par la connexion donnée.

B. La torsion d'une Π -structure peut être regardée comme la torsion d'une Π -connexion convenable (pour le cas presque complexe cf. A. Lichnerowicz [22]).

Partons en effet d'une connexion linéaire (complexe ou réelle) sans torsion, par exemple une connexion riemannienne, définie relativement à des bases

adaptées par (ω_j^i) . (θ^i) étant en chaque point la cobase duale de la base adaptée envisagée, posons $\omega_j^i = \gamma_{i\ k}^j \theta^k$. L'hypothèse de nullité de la torsion de la connexion se traduit par

$$(28) \quad \begin{cases} d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \theta^B \wedge \omega_B^\alpha = \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \gamma_{B\ \beta}^\alpha \theta^B \wedge \theta^\beta + \frac{1}{2}(\gamma_{B\ C}^\alpha - \gamma_{C\ B}^\alpha) \theta^B \wedge \theta^C, \\ d\theta^A = \theta^\beta \wedge \omega_\beta^A + \theta^B \wedge \omega_B^A = \theta^B \wedge \omega_B^A + \gamma_{\beta\ B}^A \theta^\beta \wedge \theta^B + \frac{1}{2}(\gamma_{\beta\ \gamma}^A - \gamma_{\gamma\ \beta}^A) \theta^\beta \wedge \theta^\gamma. \end{cases}$$

Soit (T^i) la forme de torsion de la Π -structure. Il apparaît que

$$T^\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{B\ C}^\alpha - \gamma_{C\ B}^\alpha) \theta^B \wedge \theta^C,$$

$$T^A = \frac{1}{2}(\gamma_{\beta\ \gamma}^A - \gamma_{\gamma\ \beta}^A) \theta^\beta \wedge \theta^\gamma.$$

Nous pouvons définir une Π -connexion par les formules

$$\hat{\pi}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \gamma_{B\ \beta}^\alpha \theta^B,$$

$$\hat{\pi}_B^A = \omega_B^A - \gamma_{\beta\ B}^A \theta^\beta.$$

Les relations (28) montrent alors que la forme de torsion de cette Π -connexion coïncide avec (T^i) .

Nous en déduisons

THÉORÈME. *Pour qu'une Π -structure soit sans torsion, il faut et il suffit qu'il existe une Π -connexion sans torsion.*

C. Si V_m est munie d'une Π -connexion, tout chemin horizontal construit sur $E_C(V_m)$ relativement à la connexion linéaire complexe identifiée à la Π -connexion et issu d'une base adaptée z aboutit à une base adaptée. On en déduit que le groupe d'holonomie en z de la connexion linéaire complexe est un sous-groupe de $G(n_1, n_2)$.

Inversement soit V_m une variété différentiable munie d'une connexion linéaire complexe. Plaçons-nous en un point x de V_m et supposons qu'il existe une base complexe z au point x et un entier $n_1 < m$ tels que le groupe d'holonomie Ψ_z de la connexion en z soit sous-groupe de $G(n_1, m - n_1)$. λ étant un nombre complexe non nul, considérons au point x le tenseur dont les composantes par rapport à la base z sont

$$F_\beta^\alpha = \lambda \delta_\beta^\alpha, \quad F_A^\alpha = F_\alpha^A = 0, \quad F_B^A = -\lambda \delta_B^A,$$

où $\alpha, \beta = 1, \dots, n_1$ et $A, B = n_1 + 1, \dots, m$. Il est invariant par Ψ_x . Par transport sur V_m on en déduit un tenseur (F_j^i) défini sur toute la variété et à différentielle absolue nulle. Au point x on a $F_h^i F_j^h = \lambda^2 \delta_j^i$; cette relation reste vraie en tout point de V_m . On définit ainsi une Π -structure sur V_m . La différentielle absolue de (F_j^i) étant nulle, la connexion donnée peut alors être identifiée à une Π -connexion.

7 - Formes caractéristiques d'une Π -connexion.

Soit V_m une variété différentiable munie d'une Π -structure, déterminée en chaque point x par un opérateur linéaire $\mathbb{I}$ sur T_x^C de carré λ^2 (Identité). Supposons donnée sur V_m une Π -connexion, définie relativement à des bases adaptées par $(\pi_\beta^\alpha, \pi_B^A)$. La forme de courbure de la connexion est la 2-forme tensorielle

$$\Omega_j^i = d\pi_j^i + \pi_h^i \wedge \pi_j^h$$

(où l'on prend $\pi_A^\alpha = \pi_\alpha^A = 0$).

Posons

$$\psi_1 = \lambda \Omega_\alpha^\alpha, \quad \psi_2 = -\lambda \Omega_A^A.$$

ψ_1 et ψ_2 sont des 2-formes à valeurs scalaires (complexes). Nous dirons que ψ_1 (resp. ψ_2) est la première (resp. deuxième) forme caractéristique de la Π -connexion. On a $\psi_1 = \lambda d\pi_\alpha^\alpha$, $\psi_2 = -\lambda d\pi_A^A$; on en déduit que ψ_1 et ψ_2 sont fermées.

Donnons-nous sur V_m une connexion linéaire (complexe ou réelle) arbitraire (ω_j^i) . Soit $(\dot{\Omega}_j^i)$ sa forme de courbure. La 2-forme scalaire $\dot{\Omega}_i^i = d\omega_i^i$ est fermée. Posons $\chi = \pi_i^i - \omega_i^i$, χ définit une 1-forme scalaire et l'on a

$$(\psi_1 - \psi_2) - \lambda \dot{\Omega}_i^i = d(\lambda \chi).$$

La classe de cohomologie complexe de degré 2 ⁽¹⁾ déterminée par $(\psi_1 - \psi_2)$ est donc celle de $(\lambda \dot{\Omega}_i^i)$. Or, si on prend une connexion riemannienne, $\dot{\Omega}_i^i$ est nul. On en déduit que ψ_1 et ψ_2 définissent la même classe de cohomologie.

Supposons donnée une autre Π -connexion, définie relativement à des bases adaptées par $(\hat{\pi}_\beta^\alpha, \hat{\pi}_B^A)$. Soit $\hat{\psi}_1$ la première forme caractéristique de cette con-

⁽¹⁾ F_p étant l'espace vectoriel des p -formes fermées, définies sur V_m , à valeurs complexes et G_p le sous-espace des p -formes homologues à 0, nous appelons classe de cohomologie complexe de degré p tout élément de l'espace vectoriel quotient F_p/G_p .

nexion. $(\pi_\alpha^\alpha - \hat{\pi}_\alpha^\alpha)$ définit une 1-forme scalaire φ et l'on a

$$\psi_1 - \hat{\psi}_1 = d(\lambda \varphi).$$

La classe de cohomologie de $\hat{\psi}_1$ coïncide avec celle de ψ_1 . La classe de cohomologie des formes caractéristiques d'une Π -connexion est donc indépendante de cette Π -connexion. Nous l'appellerons *classe de cohomologie caractéristique* de la Π -structure déterminée par l'opérateur Π .

Soit $\tilde{V}_m$ le revêtement universel de la variété différentiable V_m munie d'une Π -structure; désignons par p la projection canonique $\tilde{V}_m \rightarrow V_m$. Chaque point de $\tilde{V}_m$ admet un voisinage ouvert U tel que p soit un homéomorphisme de U sur pU . Il en résulte que l'on peut définir sur $\tilde{V}_m$ une Π -structure image réciproque par p de la Π -structure donnée sur V_m . Si V_m est munie d'une Π -connexion, on définit aussi sur $\tilde{V}_m$ une Π -connexion image réciproque; son groupe d'holonomie homogène au point $\tilde{x} \in \tilde{V}_m$ peut être identifié au groupe d'holonomie homogène restreint de la connexion donnée au point $x = p\tilde{x}$. Pour simplifier le langage, nous remplacerons maintenant V_m par son revêtement universel sans changer les notations.

Considérons donc une variété différentiable V_m , simplement connexe, munie d'une Π -connexion et supposons que la forme caractéristique ψ_1 soit nulle en tout point de V_m . Relativement à toute section locale de $E_\Pi(V_m)$, on a $d\pi_\alpha^\alpha = 0$. Soit x un point de V_m ; on peut trouver un voisinage ouvert U de x muni d'une section locale de $E_\Pi(V_m)$ et une fonction f à valeurs complexes non nulles définie sur U tels que l'on ait relativement à la section locale $\pi_\alpha^\alpha = d(\log f)$. Considérons le tenseur t , covariant d'ordre n_1 , défini sur U , dont les composantes relatives à la section locale sont

$$t_{i_1 \dots i_{n_1}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n_1}}^{1 \dots n_1} f.$$

Sa différentielle absolue est déterminée par

$$\nabla t_{i_1 \dots i_{n_1}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n_1}}^{1 \dots n_1} (df - f\pi_\alpha^\alpha) = 0.$$

Étant donnée une base adaptée z au point x , le groupe d'holonomie σ_z de la connexion en z est, comme nous l'avons vu, sous-groupe de $G(n_1, n_2)$. Puisque ∇t est nul sur U , les éléments de σ_z obtenus par développement des lacets en x situés dans U laissent t invariant. On en déduit qu'ils appartiennent au sous-groupe invariant $S_1 G(n_1, n_2)$ de $G(n_1, n_2)$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

de $G(n_1, n_2)$ pour lesquelles le déterminant de A est égal à 1. Comme on peut associer à tout point x un tel voisinage U , il résulte du lemme de factorisation de Lichnerowicz (chap. I, § 4) que, pour tout $z \in E_{\Pi}(V_m)$, σ_z est lui-même sous-groupe de $S_1 G(n_1, n_2)$. Par abus de langage nous dirons que le groupe d'holonomie homogène de la connexion en un point quelconque de V_m est sous-groupe de $S_1 G(n_1, n_2)$.

Inversement, z_0 étant une base adaptée au point $x_0 \in V_m$, supposons que le groupe d'holonomie σ_{z_0} soit sous-groupe de $S_1 G(n_1, n_2)$. Il en est alors de même en tout point de $E_{\Pi}(V_m)$. Soit t le tenseur covariant d'ordre n_1 , défini au point x_0 , dont les composantes relatives à la base z_0 sont $t_{i_1 \dots i_{n_1}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n_1}}^{1 \dots n_1}$. t est invariant par σ_{z_0} . Par transport il donne naissance à un tenseur défini sur V_m , que nous désignons encore par t , à différentielle absolue nulle. Étant donné un ouvert U de V_m muni d'une section locale de $E_{\Pi}(V_m)$, il existe une fonction différentiable f à valeurs complexes non nulles définie sur U , telle que l'on ait relativement à la section locale $t_{i_1 \dots i_{n_1}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n_1}}^{1 \dots n_1} f$, d'où l'on déduit $\nabla t_{i_1 \dots i_{n_1}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n_1}}^{1 \dots n_1} (df - f\pi_{\alpha}^{\alpha})$. Par suite on a $\pi_{\alpha}^{\alpha} = d(\log f)$. La forme caractéristique ψ_1 est donc partout nulle ⁽¹⁾.

Nous aurions pu faire un raisonnement analogue en remplaçant ψ_1 par ψ_2 et $S_1 G(n_1, n_2)$ par $S_2 G(n_1, n_2)$, groupe des matrices de $G(n_1, n_2)$ telles que $\det B = 1$.

Revenons maintenant au cas d'une variété différentiable V_m non nécessairement simplement connexe, munie d'une Π -connexion. Si la première (resp. deuxième) forme caractéristique est partout nulle sur V_m , il en est de même sur le revêtement universel $\tilde{V}_m$ de la première (resp. deuxième) forme caractéristique de la Π -connexion image réciproque par p , et inversement. Nous pouvons alors énoncer

THÉORÈME. *Pour que le groupe d'holonomie homogène restreint d'une Π -connexion soit sous-groupe de $S_1 G(n_1, n_2)$ [resp. $S_2 G(n_1, n_2)$], il faut et il suffit que la première (resp. deuxième) forme caractéristique de la connexion soit nulle en tout point ⁽²⁾.*

Paris, novembre 1958

⁽¹⁾ Ce raisonnement constitue une adaptation aux Π -connexions d'un raisonnement de A. Lichnerowicz [22] concernant les connexions presque hermitiennes. Nous reviendrons sur celles-ci au chapitre III.

⁽²⁾ Les chapitres III-VI seront publiés dans le fasc. 1 du Tome VIII (1959).

CHAPITRE III.

STRUCTURES PRESQUE HERMITIENNES AU SENS LARGE

Nous définissons et nous étudions dans ce chapitre la notion de structure presque hermitienne au sens large subordonnée à une Π -structure, qui généralise celle de structure presque hermitienne subordonnée à une structure presque complexe. Le théorème du paragraphe 3 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une Π -structure admette une telle structure subordonnée. Nous étudions aussi les H -connexions, dont la définition et les propriétés généralisent celles des connexions presque hermitiennes de A. Lichnerowicz.

1. Définition des structures presque hermitiennes au sens large.

Soit V_m une variété différentiable munie d'une Π -structure, déterminée en chaque point x par un opérateur linéaire $\mathbb{I}$ sur T_x^C de carré λ^2 (Identité). Supposons qu'on ait défini sur V_m une métrique complexe de classe C^∞ , c'est-à-dire un tenseur symétrique (g_{ij}) dont les composantes dans un système de coordonnées locales (x^i) soient des fonctions complexes des (x^i) , de classe C^∞ , à déterminant partout différent de zéro. Nous dirons que la métrique est *hermitienne* par rapport à $\mathbb{I}$ si l'on a en chaque point x et pour tout couple de vecteurs v, w de T_x^C

$$(1) \quad (\mathbb{I} v, \mathbb{I} w) = -\lambda^2(v, w),$$

où (v, w) désigne le produit scalaire $g_{ij} v^i w^j$ ⁽¹⁾. Nous dirons alors que V_m est munie d'une *structure presque hermitienne au sens large* subordonnée à la Π -structure, ou encore que V_m est une variété presque hermitienne au sens large. Pour abrégé, il nous arrivera d'omettre les mots « au sens large ». Lorsque nous voudrions parler des structures appelées presque hermitiennes dans la terminologie classique, nous préciserons « structures presque hermitiennes au sens ordinaire ».

(1) se traduit par

$$(2) \quad F_i^k F_j^l g_{kl} = -\lambda^2 g_{ij}.$$

En multipliant les deux membres par F_h^j et en sommant par rapport à j , on en déduit

$$(3) \quad F_i^k g_{kh} = -F_h^k g_{ki}.$$

Si on pose $F_{ij} = F_i^k g_{kj}$, on a donc $F_{ii} + F_{ji} = 0$. Les (F_{ij}) sont les composantes d'une 2-forme extérieure que nous appellerons la *forme fondamentale* de la structure presque hermitienne. Introduisons la matrice (g^{ij}) inverse de la matrice (g_{ij}) . De (2) on déduit

$$(4) \quad F_{ik} F_{jl} g^{kl} = -\lambda^2 g_{ij}.$$

Inversement supposons qu'il existe sur une variété différentiable V_m une 2-forme (F_{ij}) à valeurs complexes et une métrique complexe (g_{ij}) , l'une et l'autre de classe C^∞ , telles que la relation (4), où λ est une constante non nulle, soit vérifiée en tout point de V_m . Considérons l'opérateur linéaire $\mathbb{I}$ sur T_x^C défini par le tenseur

$$F_j^i = F_{jk} g^{ik}.$$

On a

$$(5) \quad F_h^i F_j^h = F_{hk} g^{ik} F_{jl} g^{hl} = \lambda^2 g_{kj} g^{ik} = \lambda^2 \delta_j^i,$$

$$(6) \quad F_i^k F_j^l g_{kl} = F_{ik} F_{jl} g^{kl} = -\lambda^2 g_{ij}.$$

F_j^i n'est certainement pas proportionnel au tenseur de Kronecker δ_j^i (on déduirait alors de (5) et (6): $g_{ij} = 0$). La relation (5) montre que $\mathbb{I}$ détermine une Π -structure et il résulte de (6) que la métrique (g_{ij}) est hermitienne par rapport à $\mathbb{I}$.

Soit v un vecteur quelconque de T_x^C . De la relation (1), où l'on remplace

⁽¹⁾ La notion de métrique hermitienne est indépendante de la constante λ choisie pour définir l'opérateur $\mathbb{I}$.

w par $\mathbb{I}v$, on déduit

$$(v, \mathbb{I}v) = 0.$$

Sur une variété presque hermitienne tout vecteur est orthogonal, par rapport à la métrique, à son transformé par $\mathbb{I}$.

2. Bases H -adaptées.

Prenons au point x une base adaptée au sens du chapitre II: $F_\beta^\alpha = \lambda \hat{z}_\beta^\alpha$, $F_A^\alpha = F_\alpha^A = 0$, $F_B^A = -\lambda \hat{z}_B^A$. Pour que (g_{ij}) satisfasse à la relation (3), il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \quad g_{\alpha\beta} = 0, \quad g_{AB} = 0.$$

Si n_1 est différent de n_2 , (7) est incompatible avec l'hypothèse dét. $(g_{ij}) \neq 0$. Pour qu'une Π -structure sur V_m admette une structure presque hermitienne au sens large subordonnée, il est donc nécessaire que V_m soit de dimension paire $m = 2n$ et que $n_1 = n_2 = n$. Dans la suite de ce chapitre nous supposerons ces conditions remplies et nous adopterons les notations suivantes: i et tout indice (minuscule) latin $= 1, \dots, 2n$; α et tout indice grec $= 1, \dots, n$; $\alpha^* = \alpha + n$.

Soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une structure presque hermitienne au sens large. Choisissons au point x une base adaptée (e_α) , (e_{α^*}) . Il existe un vecteur $v_1 = \xi^{\beta^*} e_{\beta^*}$ de T_2 tel que

$$(8) \quad (e_1, v_1) = 1, \quad (e_\gamma, v_1) = 0 \quad \text{pour } \gamma \neq 1.$$

En effet (8) se traduit par

$$g_{\gamma\beta^*} \xi^{\beta^*} = \delta_{\gamma 1} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

et les ξ^{β^*} sont déterminés de manière unique par un système d'équations linéaires de Cramer. D'une façon générale, pour α donné, il existe un vecteur v_α de T_2 et un seul tel que

$$(e_\gamma, v_\alpha) = \delta_{\gamma\alpha} \quad \text{pour } \gamma = 1, \dots, n.$$

Les n vecteurs v_α sont linéairement indépendants, car une relation linéaire $A^\beta v_\beta = 0$ entraîne, par multiplication scalaire des deux membres par e_α : $A^\alpha = 0$. Ils forment donc une base de T_2 . Posons $e_{\alpha'} = e_\alpha$, $e_{\alpha'^*} = v_\alpha$. L'ensemble des vecteurs $(e_{i'})$ constitue une base adaptée au sens du chapitre II. Soit (h^i) la cobase duale. Désignons par ds^2 la forme quadratique définie par la métrique, par F la forme fondamentale de la structure presque hermitienne. On a

$$(9) \quad \begin{cases} ds^2 = 2 \sum_{\alpha} \theta^{\alpha} \theta^{\alpha*}, \\ F = \lambda \sum_{\alpha} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha*}. \end{cases}$$

Toute base par rapport à laquelle on a les relations (9) sera dite *adaptée à la structure presque hermitienne* ou, brièvement, *H-adaptée*. Pour éviter des confusions, les bases adaptées au sens du chapitre II seront désormais appelées bases *adaptées à la Π -structure* ou, brièvement, *Π -adaptées*. Toute base *H-adaptée* est *Π -adaptée*. Il résulte de l'étude précédente qu'il existe, au point x , une (et une seule) base *H-adaptée* dont les n premiers vecteurs soient des vecteurs linéairement indépendants de T_1 arbitrairement choisis.

Soit (f_i) une base *H-adaptée* au point x . Toute autre base *H-adaptée* en ce point peut être définie par $f_{\beta'} = A_{\beta'}^{\alpha} f_{\alpha}$, $f_{\beta*} = A_{\beta*}^{\alpha*} f_{\alpha*}$ où les matrices $A = (A_{\beta'}^{\alpha})$, $B = (A_{\beta*}^{\alpha*})$ satisfont à

$$\sum_{\alpha} A_{\beta'}^{\alpha} A_{\gamma*}^{\alpha*} = \delta_{\beta\gamma}.$$

B est donc l'inverse de la transposée de A , ce que nous écrirons $B = {}^t A^{-1}$. Soient $E_H(V_{2n})$ l'ensemble des bases *H-adaptées* relatives aux différents points de V_{2n} et p l'application $E_H(V_{2n}) \rightarrow V_{2n}$ qui, à une base relative à x , fait correspondre le point x lui-même. $E_H(V_{2n})$ a, par rapport à p , une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_{2n} , dont le groupe structural est le sous-groupe $\Gamma(n)$ de $GL(2n, \mathbb{C})$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

pour lesquelles A et B appartiennent à $GL(n, \mathbb{C})$ et $B = {}^t A^{-1}$. $\Gamma(n)$ est isomorphe à $GL(n, \mathbb{C})$. Le déterminant de toute matrice de $\Gamma(n)$ est égal à 1.

Étant donnée une base *H-adaptée* (f_i) au point x , convenons de dire qu'une base complexe (e_i) relative à x est *distinguée* si la matrice (M_j^i) définie par $e_j = M_j^i f_i$ a un déterminant réel positif; cette notion est indépendante du choix de la base *H-adaptée* au point x . Soit $E^+(V_{2n})$ l'ensemble des bases distinguées relatives aux différents points de V_{2n} . Désignons encore par p l'application $E^+(V_{2n}) \rightarrow V_{2n}$ qui, à une base relative à x , fait correspondre le point x lui-même. $E^+(V_{2n})$ a, par rapport à p , une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_{2n} , dont le groupe structural est le sous-groupe $GL^+(2n, \mathbb{C})$ de $GL(2n, \mathbb{C})$ constitué par les matrices à déterminant réel positif. L'existence d'un tel espace fibré peut être envisagée, pour une variété différentiable V_{2n} , comme une généralisation de la propriété d'orientabilité.

3. *Isomorphismes de T_1 sur T_2 associés à une structure presque hermitienne au sens large. Cas des structures presque hermitiennes au sens ordinaire.*

A. Soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une II-structure, déterminée en chaque point x par deux sous-espaces supplémentaires T_1 et T_2 de T_x^C de dimension n . Supposons qu'on ait défini sur V_{2n} une structure presque hermitienne au sens large subordonnée à cette II-structure. L'espace fibré $E_H(V_{2n})$ des bases H -adaptées admet, comme nous venons de le voir, un groupe structural $\Gamma(n)$ isomorphe à $GL(n, C)$. Il résulte de la théorie des espaces fibrés qu'il existe un sous-espace de $E_H(V_{2n})$ ayant lui-même, par rapport à la projection p , une structure d'espace fibré principal de base V_{2n} et de groupe structural isomorphe au groupe unitaire $U(n)$. Nous dirons brièvement que $E_H(V_{2n})$ admet un « sous-espace fibré principal » de groupe structural isomorphe à $U(n)$.

Pour construire un tel sous-espace, donnons-nous sur V_{2n} une métrique riemannienne définie positive (γ_{ij}) . Désignons par $\langle v, w \rangle$ le produit scalaire $\gamma_{ij} v^i w^j$ de deux vecteurs v et w de T_x^C , par $\bar{v}$ le vecteur complexe conjugué de v . Nous dirons qu'une base II-adaptée (e_i) au point x est *spéciale* pour la métrique (γ_{ij}) si $\langle e_\alpha, \bar{e}_\beta \rangle$ est égal à $\delta_{\alpha\beta}$ (symbole de Kronecker) pour tout couple (α, β) d'indices compris entre 1 et n ⁽¹⁾. Considérons au point x deux bases (f_i) et $(f_{i'})$ qui soient à la fois H -adaptées et spéciales. Il existe une matrice unitaire d'ordre n , $A = (A_{\beta'}^\alpha)$, telle que l'on ait $f_{\beta'} = A_{\beta'}^\alpha f_\alpha$, $f_{\beta'^*} = (A^{-1})_{\beta'}^\alpha f_{\alpha^*}$. Or, A étant unitaire, ${}^t A^{-1}$ coïncide avec la matrice $\bar{A}$, complexe conjuguée de A . On peut donc écrire

$$(10) \quad f_{\beta'} = A_{\beta'}^\alpha f_\alpha, \quad f_{\beta'^*} = \bar{A}_{\beta'}^\alpha f_{\alpha^*}.$$

L'ensemble des bases H -adaptées, spéciales pour la métrique (γ_{ij}) , relatives aux différents points de V_{2n} admet une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_{2n} , dont le groupe structural, isomorphe au groupe unitaire $U(n)$, est le sous-groupe de $\Gamma(n)$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix},$$

où $A \in U(n)$.

⁽¹⁾ L'existence de telles bases peut être établie par un raisonnement par récurrence. Étant donnés r vecteurs ($r < n$) $e_1, \dots, e_r$ de T_1 tels que $\langle e_\alpha, \bar{e}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ pour tout couple (α, β) d'indices compris entre 1 et r , on peut trouver un vecteur e_{r+1} de T_1 tel que $\langle e_\alpha, \bar{e}_{r+1} \rangle = 0$ pour $\alpha = 1, \dots, r$ et $\langle e_{r+1}, \bar{e}_{r+1} \rangle = 1$; et les vecteurs $e_1, \dots, e_{r+1}$ sont linéairement indépendants.

Soit (f_i) une base H -adaptée spéciale au point x . Au vecteur $v = v^\alpha f_\alpha$ de T_1 associons le vecteur Sv de T_x^C défini par

$$(11) \quad Sv = v^\alpha \bar{f}_{\alpha^*}.$$

Il résulte des formules (10) que Sv est indépendant du choix de la base H -adaptée spéciale au point x . En procédant ainsi en chaque point, nous définissons sur V_{2n} un champ différentiable d'isomorphismes S ⁽¹⁾ de l'espace vectoriel T_1 sur l'espace vectoriel $\bar{T}_2$, complexe conjugué de T_2 . Ce champ n'est pas canoniquement associé à la structure presque hermitienne au sens large donnée, puisque la métrique riemannienne (γ_{ij}) est arbitraire; nous dirons que S est l'isomorphisme de T_1 sur $\bar{T}_2$ déterminé par la structure presque hermitienne et par la métrique (γ_{ij}) .

Inversement soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une Π -structure telle que T_1 et T_2 soient de dimension n et qu'il existe un champ différentiable d'isomorphismes S de T_1 sur $\bar{T}_2$. Nous dirons qu'une base Π -adaptée (e_i) est S -adaptée si l'on a $\bar{e}_{\alpha^*} = S e_\alpha$ pour $\alpha = 1, \dots, n$, $\alpha^* = \alpha + n$. L'ensemble $E_S(V_{2n})$ des bases S -adaptées relatives aux différents points de V_{2n} admet une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_{2n} , dont le groupe structural, isomorphe à $GL(n, C)$, est le sous-groupe $\hat{\Gamma}(n)$ de $GL(2n, C)$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix},$$

où $A \in GL(n, C)$. Donnons-nous sur V_{2n} une métrique riemannienne définie positive (γ_{ij}) . L'ensemble des bases S -adaptées qui sont spéciales pour la métrique (γ_{ij}) est un sous-espace fibré principal de $E_S(V_{2n})$, dont le groupe structural, isomorphe au groupe unitaire $U(n)$, est constitué par les matrices de $\hat{\Gamma}(n)$ telles que A appartienne à $U(n)$. Définissons au point x de V_{2n} un tenseur symétrique (g_{ij}) par ses composantes relatives à une base S -adaptée spéciale

$$(12) \quad g_{\alpha\beta} = 0, \quad g_{\alpha^*\beta^*} = 0, \quad g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Ce tenseur est invariant par changement de base S -adaptée spéciale. En procédant ainsi en chaque point, nous définissons sur V_{2n} une métrique complexe qui détermine une structure presque hermitienne au sens large subordonnée à

⁽¹⁾ Cette expression signifie que, si l'on définit localement un champ différentiable de vecteurs v appartenant en chaque point à T_1 , le champ local des vecteurs Sv est lui aussi différentiable.

la Π -structure. Les bases S -adaptées spéciales sont adaptées à cette structure presque hermitienne.

Nous énoncerons

THÉOREME. *Pour qu'une Π -structure, déterminée sur une variété différentiable par deux champs de sous-espaces supplémentaires T_1 et T_2 de l'espace vectoriel tangent complexifié, admette une structure presque hermitienne au sens large subordonnée, il faut et il suffit que T_1 et T_2 aient la même dimension et que l'on puisse définir un champ différentiable d'isomorphismes de T_1 sur $\bar{T}_2$.*

B. Une structure presque hermitienne au sens ordinaire (de classe C^∞) est déterminée sur une variété différentiable V_{2n} par la donnée

a) d'une structure presque complexe (de classe C^∞): c'est une Π -structure pour laquelle T_1 et T_2 sont complexes conjugués, ou - ce qui revient au même - pour laquelle l'opérateur $\mathbb{I}$ associé à $\lambda = i$ ($\mathbb{I}^2 = -$ Identité) est réel, c'est-à-dire laisse T_x invariant;

b) d'une métrique riemannienne définie positive (g_{ij}) (de classe C^∞) telle que l'on ait en chaque point x et pour tout couple de vecteurs v, w de T_x : $(\mathbb{I}v, \mathbb{I}w) = (v, w)$, où (v, w) désigne le produit scalaire $g_{ij}v^i w^j$.

Cette définition se présente bien comme un cas particulier de la définition donnée au paragraphe 1.

Prenons la métrique (g_{ij}) elle-même pour définir les bases spéciales. Une base H -adaptée (f_i) est spéciale pour cette métrique si et seulement si $(f_\alpha, \bar{f}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ pour $\alpha = 1, \dots, n$ et $\beta = 1, \dots, n$, donc si et seulement si

$$(13) \quad f_{\alpha*} = \bar{f}_\alpha$$

pour $\alpha = 1, \dots, n$. C'est à de telles bases que A. Lichnerowicz [22] a réservé le nom de bases adaptées à la structure presque hermitienne. L'ensemble des bases adaptées au sens de Lichnerowicz relatives aux différents points de V_{2n} admet une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_{2n} , dont le groupe structural est isomorphe au groupe unitaire $U(n)$.

L'isomorphisme S de T_1 sur T_2 (qui coïncide avec T_1) déterminé par la structure presque hermitienne et par la métrique (g_{ij}) n'est autre que l'application identique de T_1 sur lui-même.

Inversement, étant donnée une variété différentiable V_{2n} munie d'une structure presque complexe, désignons par S l'application identique de T_1 sur lui-même. Donnons-nous sur V_{2n} une métrique riemannienne définie positive (γ_{ij}) . Relati-

vement aux bases S -adaptées, spéciales pour la métrique (γ_{ij}) , les formules (12) déterminent une nouvelle métrique (g_{ij}) . Si v est un vecteur réel au point x , on a, relativement à de telles bases,

$$g_{ij} v^i v^j = 2 \sum_{\alpha} v^{\alpha} v^{\alpha*} = 2 \sum_{\alpha} |v^{\alpha}|^2.$$

La métrique (g_{ij}) est donc définie positive. Elle détermine sur V_{2n} une structure presque hermitienne au sens ordinaire. On retrouve ainsi le résultat classique: toute structure presque complexe admet une structure presque hermitienne (au sens ordinaire) subordonnée.

4. H -connexions.

A. Soit V_{2n} une variété presque hermitienne au sens large. Nous appellerons H -connexion toute connexion infinitésimale définie sur l'espace fibre $E_H(V_{2n})$ des bases adaptées à la structure presque hermitienne.

$E_H(V_{2n})$ peut être considéré comme un sous-espace de l'espace $E_{\Pi}(V_{2n})$ des bases adaptées à la Π -structure. Une H -connexion détermine canoniquement une Π -connexion, donc une connexion linéaire complexe, avec laquelle nous l'identifierons. Inversement donnons-nous une connexion linéaire complexe. Si on considère un recouvrement de V_{2n} par des ouverts munis chacun d'une section locale de $E_H(V_{2n})$, cette connexion peut être définie relativement à chaque section locale par une forme locale sur chaque ouvert, à valeurs dans l'algèbre de Lie de $GL(2n, C)$, représentée par une matrice (ω_j^i) dont les éléments sont des formes de Pfaff locales (à valeurs complexes). Pour que la connexion donnée puisse être identifiée à une H -connexion, il faut et il suffit que (ω_j^i) appartienne à l'algèbre de Lie du groupe structural $\Gamma(n)$ de $E_H(V_{2n})$, c'est-à-dire que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$(14) \quad \omega_{\beta*}^{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta*} = 0,$$

$$(15) \quad \omega_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\alpha*}^{\beta*} = 0.$$

Comme nous l'avons vu dans l'étude des Π -structures (chap. II, § 6), les conditions (14) expriment que le tenseur (F_j^i) est à différentielle absolue nulle (condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait une Π -connexion). Pour interpréter (15), introduisons la différentielle absolue du tenseur métrique

$$\begin{aligned} \nabla g_{\alpha\beta} &= -\omega_{\alpha}^h g_{h\beta} - \omega_{\beta}^h g_{\alpha h} = -\omega_{\alpha}^{\beta*} - \omega_{\beta}^{\alpha*}, \\ \nabla g_{\alpha\beta*} &= -\omega_{\alpha}^h g_{h\beta*} - \omega_{\beta*}^h g_{\alpha h} = -\omega_{\alpha}^{\beta} - \omega_{\beta*}^{\alpha*}, \\ \nabla g_{\alpha*\beta*} &= -\omega_{\alpha*}^h g_{h\beta*} - \omega_{\beta*}^h g_{\alpha*h} = -\omega_{\alpha*}^{\beta} - \omega_{\beta*}^{\alpha*}. \end{aligned}$$

Si les conditions (14) sont déjà remplies, (15) équivaut à $\nabla g_{ij} = 0$. Nous énoncerons

THÉORÈME. *Pour qu'une connexion linéaire complexe puisse être identifiée à une H -connexion, il faut et il suffit que les tenseurs (F_j^i) et (g_{ij}) soient à différentielle absolue nulle.*

Nous dirons qu'une connexion linéaire complexe définie sur une variété différentiable munie d'une métrique complexe (g_{ij}) est *euclidienne* si $\nabla g_{ij} = 0$. Le théorème précédent exprime qu'on peut identifier les H -connexions aux Π -connexions euclidiennes (pour la métrique définissant la structure presque hermitienne).

B. Donnons-nous, sur une variété presque hermitienne au sens large V_{2n} , une connexion euclidienne, définie relativement à des bases Π -adaptées par (ω_j^i) . La Π -connexion induite (définie par $\pi_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha$, $\pi_{\beta*}^{\alpha*} = \omega_{\beta*}^{\alpha*}$, $\pi_{\beta*}^\alpha = \pi_\beta^{\alpha*} = 0$) est encore euclidienne. Elle peut donc être identifiée à une H -connexion.

En particulier il existe sur V_{2n} une connexion euclidienne et une seule qui soit sans torsion. Ses composantes en coordonnées locales sont déterminées à partir de celles du tenseur métrique par les mêmes formules que dans le cas des variétés riemanniennes ordinaires, l'hypothèse g_{ij} complexe n'apportant pas de modification fondamentale. Aussi lui donnons-nous le nom de *connexion riemannienne*. La connexion induite est une H -connexion, que nous appellerons *première connexion canonique* ou *connexion de Lichnerowicz* (pour les variétés presque hermitiennes au sens ordinaire cf. A. Lichnerowicz [22] et G. Legrand [14]).

Soient (ω_j^i) , resp. (π_j^i) , les formes définissant la connexion riemannienne, resp. connexion de Lichnerowicz, relativement à une section locale quelconque de $E_C(V_{2n})$. Posons

$$\omega_j^i = \gamma_{j\ k}^i \theta^k, \quad \pi_j^i = l_{j\ k}^i \theta^k,$$

où (θ^i) est, en chaque point, la cobase duale de la base définie par la section locale: nous dirons que les $(\gamma_{j\ k}^i)$, resp. $(l_{j\ k}^i)$, sont les composantes de la connexion riemannienne, resp. connexion de Lichnerowicz, relativement à la section locale considérée. $\tau_{j\ k}^i = l_{j\ k}^i - \gamma_{j\ k}^i$ définit un tenseur. Par rapport à des bases Π -adaptées on a

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\ k}^\alpha &= 0, & \tau_{\beta* \ k}^{\alpha*} &= -\gamma_{\beta* \ k}^{\alpha*}, \\ \tau_{\beta* \ k}^{\alpha*} &= 0, & \tau_{\beta\ k}^\alpha &= -\gamma_{\beta\ k}^\alpha. \end{aligned}$$

Soit (∇F_j^i) la différentielle absolue du tenseur (F_j^i) dans la connexion rieman-

nienne. Introduisons la dérivée covariante $\nabla_k F_j^i$, définie par $\nabla F_j^i = \nabla_k F_j^i \theta^k$. Par rapport à des bases II-adaptées

$$\begin{aligned}\nabla_k F_{\beta}^{\alpha} &= 0, & \nabla_k F_{\beta*}^{\alpha} &= -2\lambda \gamma_{\beta*}^{\alpha}{}_k, \\ \nabla_k F_{\beta*}^{\alpha*} &= 0, & \nabla_k F_{\beta}^{\alpha*} &= 2\lambda \gamma_{\beta}^{\alpha*}{}_k.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\tau_{j\ k}^i = \frac{1}{2\lambda^2} F_h^i \nabla_k F_j^h$$

et cette relation reste vraie par rapport à toute base. Finalement

$$(16) \quad l_{j\ k}^i = \gamma_{j\ k}^i + \frac{1}{2\lambda^2} F_h^i \nabla_k F_j^h.$$

La forme de torsion de la connexion de Lichnerowicz est définie par

$$\widehat{\mathcal{T}}^i = d\theta^i + \pi_j^i \wedge \theta^j.$$

La connexion riemannienne étant sans torsion, on peut écrire

$$(17) \quad \widehat{\mathcal{T}}^i = \tau_{j\ k}^i \theta^k \wedge \theta^j = \frac{1}{4\lambda^2} F_h^i (\nabla_j F_k^h - \nabla_k F_j^h) \theta^j \wedge \theta^k.$$

Relativement à des bases II-adaptées

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\mathcal{T}}^{\alpha} &= \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\beta} F_{\gamma*}^{\alpha} \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma*} + \frac{1}{4\lambda} (\nabla_{\beta*} F_{\gamma*}^{\alpha} - \nabla_{\gamma*} F_{\beta*}^{\alpha}) \theta^{\beta*} \wedge \theta^{\gamma*}, \\ \widehat{\mathcal{T}}^{\alpha*} &= \frac{-1}{2\lambda} \nabla_{\beta*} F_{\gamma}^{\alpha*} \theta^{\beta*} \wedge \theta^{\gamma} - \frac{1}{4\lambda} (\nabla_{\beta} F_{\gamma}^{\alpha*} - \nabla_{\gamma} F_{\beta}^{\alpha*}) \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma}. \end{aligned} \right.$$

Le deuxième terme représente la forme de torsion de la II-structure.

La forme de courbure de la connexion de Lichnerowicz est définie par

$$\widehat{\Omega}_j^i = d\pi_j^i + \pi_h^i \wedge \pi_j^h.$$

Soit (Ω_j^i) la forme de courbure de la connexion riemannienne:

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_h^i \wedge \omega_j^h.$$

D'après (16)

$$\pi_j^i = \omega_j^i + \frac{1}{2\lambda^2} F_h^i \nabla F_j^h.$$

On en déduit

$$(18) \quad \widehat{\Omega}_j^i = \Omega_j^i + \frac{1}{4\lambda^2} \nabla F_h^i \wedge \nabla F_j^h + \frac{1}{2\lambda^2} F_h^i \nabla \nabla F_j^h,$$

où $\nabla \nabla F_j^h$, différentielle absolue de la 1-forme tensorielle (∇F_j^h) dans la connexion riemannienne, est définie par

$$\nabla \nabla F_j^h = d \nabla F_j^h + \omega_i^h \wedge \nabla F_j^i - \omega_j^i \wedge \nabla F_i^h.$$

C. C. Ehresmann et P. Libermann [8] ont associé aux structures presque hermitiennes au sens ordinaire une autre connexion canonique, se réduisant dans le cas hermitien à une connexion considérée par plusieurs auteurs (voir notamment S. S. Chern [5]). On peut en généraliser la définition aux variétés presque hermitiennes au sens large.

Nous caractériserons la *deuxième connexion canonique* ou *connexion de Chern-Libermann* ⁽¹⁾ par les propriétés suivantes:

a) C'est une *H*-connexion.

b) Relativement à des bases Π -adaptées, sa forme de torsion s'exprime par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}^\alpha = \frac{1}{2} b_{\beta}^{\alpha}{}_{\gamma} \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma} + T^{\alpha}, \\ \mathcal{T}^{\alpha*} = \frac{1}{2} b_{\beta*}^{\alpha*}{}_{\gamma*} \theta^{\beta*} \wedge \theta^{\gamma*} + T^{\alpha*}, \end{array} \right.$$

où $(T^{\alpha}, T^{\alpha*})$ est la forme de torsion de la Π -structure et $(b_{\beta}^{\alpha}{}_{\gamma}, b_{\beta*}^{\alpha*}{}_{\gamma*})$ un tenseur antisymétrique par rapport aux indices inférieurs.

Montrons qu'il existe une et une seule connexion satisfaisant à ces conditions. Soient $(c_{j\ k}^i)$ les composantes de la connexion cherchée, $(\gamma_{j\ k}^i)$ celles de la connexion riemannienne. Posons

$$(19) \quad \sigma_{j\ k}^i = c_{j\ k}^i - \gamma_{j\ k}^i.$$

Les $(\sigma_{j\ k}^i)$ sont les composantes d'un tenseur. La forme de torsion de la connexion s'exprime par

$$\mathcal{T}^i = \sigma_{j\ k}^i \theta^k \wedge \theta^j = \frac{1}{2} (\sigma_{k\ j}^i - \sigma_{j\ k}^i) \theta^j \wedge \theta^k.$$

Relativement à des bases *H*-adaptées, les conditions a) et b) se traduisent par

$$(20\ a) \quad c_{\beta*}^{\alpha}{}_{k} = c_{\beta}^{\alpha*}{}_{k} = 0, \quad c_{\beta}^{\alpha}{}_{k} + c_{\alpha*}^{\beta*}{}_{k} = 0,$$

$$(20\ b) \quad \sigma_{\gamma*}^i{}_{\beta} - \sigma_{\beta}^i{}_{\gamma*} = 0.$$

(20 a) peut s'écrire

$$\sigma_{\beta*}^{\alpha}{}_{k} = -\gamma_{\beta*}^{\alpha}{}_{k}, \quad \sigma_{\beta}^{\alpha*}{}_{k} = -\gamma_{\beta}^{\alpha*}{}_{k}, \quad \sigma_{\beta}^{\alpha}{}_{k} + \sigma_{\alpha*}^{\beta*}{}_{k} = -(\gamma_{\beta}^{\alpha}{}_{k} + \gamma_{\alpha*}^{\beta*}{}_{k}).$$

La connexion riemannienne étant euclidienne, le second membre de la dernière équation est nul. En tenant compte de (20 b), on obtient alors

$$\begin{array}{ll} \sigma_{\beta}^{\alpha}{}_{\gamma*} = -\gamma_{\gamma*}^{\alpha}{}_{\beta}, & \sigma_{\beta*}^{\alpha*}{}_{\gamma} = -\gamma_{\gamma}^{\alpha*}{}_{\beta*}, \\ \sigma_{\beta}^{\alpha}{}_{\gamma} = \gamma_{\gamma}^{\beta*}{}_{\alpha*}, & \sigma_{\beta*}^{\alpha*}{}_{\gamma*} = \gamma_{\gamma*}^{\beta}{}_{\alpha}. \end{array}$$

⁽¹⁾ Dans [14] nous avons étudié sous le nom de connexion de Chern-Libermann une autre connexion associée à une structure presque hermitienne au sens ordinaire. Elle n'est pas en général une Π -connexion, mais elle induit la deuxième connexion canonique définie ici. Dans le cas pseudohermitien les deux connexions coïncident.

Si on introduit la dérivée covariante $(\nabla_k F_j^i)$ du tenseur (F_j^i) dans la connexion riemannienne et si on pose

$$\nabla^k F_j^i = g^{kh} \nabla_h F_j^i,$$

on peut mettre les résultats précédents sous la forme

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{\beta \gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} \nabla^{\alpha} F_{\beta \gamma}, & \sigma_{\beta}^{\alpha*}{}_{\gamma} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma} F_{\beta}^{\alpha*}, \\ \sigma_{\beta \gamma*}^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\beta} F_{\gamma*}^{\alpha}, & \sigma_{\beta}^{\alpha*}{}_{\gamma*} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma*} F_{\beta}^{\alpha*}, \\ \sigma_{\beta* \gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma} F_{\beta*}^{\alpha}, & \sigma_{\beta*}^{\alpha*}{}_{\gamma} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\beta*} F_{\gamma}^{\alpha*}, \\ \sigma_{\beta* \gamma*}^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma*} F_{\beta*}^{\alpha}, & \sigma_{\beta*}^{\alpha*}{}_{\gamma*} = \frac{1}{2\lambda} \nabla^{\alpha*} F_{\beta* \gamma*}. \end{array} \right.$$

Inversement ces formules définissent bien un tenseur sur V_{2n} et la connexion qui lui est associée par (19) satisfait aux conditions posées. Notons que les formules (21) restent valables par rapport à toute base Π -adaptée.

La forme de torsion de la connexion peut alors s'exprimer, relativement à des bases Π -adaptées, par

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} \nabla^{\alpha} F_{\beta \gamma} \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma} + \frac{1}{4\lambda} (\nabla_{\beta*} F_{\gamma*}^{\alpha} - \nabla_{\gamma*} F_{\beta*}^{\alpha}) \theta^{\beta*} \wedge \theta^{\gamma*}, \\ \mathcal{T}^{\alpha*} = \frac{1}{2\lambda} \nabla^{\alpha*} F_{\beta* \gamma*} \theta^{\beta*} \wedge \theta^{\gamma*} - \frac{1}{4\lambda} (\nabla_{\beta} F_{\gamma}^{\alpha*} - \nabla_{\gamma} F_{\beta}^{\alpha*}) \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma}, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$b_{\beta \gamma}^{\alpha} = \frac{1}{\lambda} \nabla^{\alpha} F_{\beta \gamma}, \quad b_{\beta* \gamma*}^{\alpha*} = \frac{1}{\lambda} \nabla^{\alpha*} F_{\beta* \gamma*}.$$

Par rapport à une base quelconque on peut écrire

$$\sigma_{jk}^i = \frac{1}{2\lambda^2} F_h^i \nabla_k F_j^h + \frac{1}{4\lambda^2} (F_h^i \nabla_j F_k^h + F_j^h \nabla_h F_k^i - F_h^i \nabla^h F_{jk} - F_k^h \nabla^i F_{jh}).$$

En effet cette formule définit bien un tenseur, dont les composantes par rapport à une base Π -adaptée coïncident avec celles qui sont définies par (21). On en déduit que, relativement à des bases quelconques, c'est-à-dire à une section locale quelconque de $E_C(V_{2n})$, les composantes de la connexion de Chern-Libermann sont

$$(23) \quad c_{jk}^i = \gamma_{jk}^i + \frac{1}{2\lambda^2} F_h^i \nabla_k F_j^h + \frac{1}{4\lambda^2} (F_h^i \nabla_j F_k^h + F_j^h \nabla_h F_k^i - F_h^i \nabla^h F_{jk} - F_k^h \nabla^i F_{jh}).$$

5. Groupes d'holonomie des H -connexions.

Donnons-nous, sur une variété presque hermitienne au sens large V_{2n} , une H -connexion. Tout chemin horizontal construit sur $E_C(V_{2n})$ relativement à la connexion linéaire complexe identifiée à la H -connexion et issu d'une base H -adaptée z aboutit à une base H -adaptée. On en déduit que le groupe d'holonomie en z de la connexion linéaire complexe est un sous-groupe de $\Gamma(n)$.

Inversement soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une connexion linéaire complexe et supposons qu'au point x de V_{2n} il existe une base complexe z telle que le groupe d'holonomie Ψ_z de la connexion en z soit sous-groupe de $\Gamma(n)$. λ étant un nombre complexe non nul, considérons au point x les tenseurs (g_{ij}) et (F_j^i) dont les composantes par rapport à la base z sont

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= 0, & g_{\alpha^*\beta^*} &= 0, & g_{\alpha\beta^*} &= g_{\beta^*\alpha} = \delta_{\alpha\beta}, \\ F_{\beta}^{\alpha} &= \lambda \delta_{\beta}^{\alpha}, & F_{\beta^*}^{\alpha^*} &= -\lambda \delta_{\beta^*}^{\alpha^*}, & F_{\beta^*}^{\alpha} &= F_{\beta}^{\alpha^*} = 0, \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ et $\alpha^* = \alpha + n$. Ces tenseurs sont invariants par Ψ_z . Par transport sur V_{2n} on en déduit des tenseurs (g_{ij}) et (F_j^i) définis sur toute la variété. Au point $x: F_h^i F_j^h = \lambda^2 \delta_j^i$ et $F_i^k F_j^l g_{kl} = -\lambda^2 g_{ij}$; et ces relations restent vraies en tout point de V_{2n} . On définit ainsi sur V_{2n} une structure presque hermitienne au sens large. Les tenseurs (g_{ij}) et (F_j^i) étant à différentielle absolue nulle, la connexion donnée peut être identifiée à une H -connexion.

Soit maintenant une variété différentiable V_{2n} munie d'une métrique complexe (g_{ij}) . Nous dirons qu'une base complexe z définie en un point de V_{2n} est adaptée à la métrique si les composantes du tenseur métrique par rapport à z sont

$$g_{\alpha\beta} = 0, \quad g_{\alpha^*\beta^*} = 0, \quad g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Donnons-nous sur V_{2n} une connexion euclidienne et supposons qu'il existe au point x de V_{2n} une base z , adaptée à la métrique, telle que le groupe d'holonomie Ψ_z soit sous-groupe de $G(n, n)$ ⁽¹⁾. Par hypothèse $\nabla g_{ij} = 0$; le tenseur métrique est donc invariant par Ψ_z . On en déduit que Ψ_z est sous-groupe de $\Gamma(n)$. Alors, par le procédé indiqué plus haut, on peut douer V_{2n} d'une structure presque hermitienne au sens large, pour laquelle la métrique coïncide avec la métrique initiale. La connexion donnée peut être identifiée à une H -connexion.

(1) Cette notation a été définie au chapitre II, paragraphe 2.

6. *Forme caractéristique d'une H -connexion.*

Soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une Π -structure, déterminée en chaque point x par un opérateur linéaire $\mathbb{I}$ sur T_x^C de carré λ^2 (Identité). Supposons qu'on ait défini sur V_{2n} une structure presque hermitienne au sens large subordonnée à cette Π -structure et donnons-nous une H -connexion. Elle détermine canoniquement une Π -connexion; on peut donc lui associer deux formes caractéristiques ψ_1 et ψ_2 (chap. II, § 7). Si la connexion est définie relativement à des bases Π -adaptées par $(\pi_\beta^\alpha, \pi_{\beta*}^{\alpha*})$, on a

$$\psi_1 = \lambda d\pi_\alpha^\alpha, \quad \psi_2 = -\lambda d\pi_{\alpha*}^{\alpha*}.$$

La connexion donnée étant une H -connexion, on peut écrire, relativement à des bases H -adaptées,

$$\pi_\beta^\alpha + \pi_{\alpha*}^{\beta*} = 0.$$

On en déduit

$$\psi_1 - \psi_2 = 0.$$

Nous poserons $\psi = \psi_1 = \psi_2$ et nous dirons que ψ est la *forme caractéristique de la H -connexion*. ψ est fermée. Sa classe de cohomologie complexe est la classe caractéristique de la Π -structure. Elle ne change donc pas si on change la H -connexion et même si on change la structure presque hermitienne au sens large subordonnée à la Π -structure.

Dans le cas des variétés presque hermitiennes au sens ordinaire, on peut se restreindre à des bases H -adaptées (f_i) pour lesquelles f_α et $f_{\alpha*}$ sont complexes conjugués. Une H -connexion sera réelle si, par rapport à de telles bases, π_β^α et $\pi_{\beta*}^{\alpha*}$ sont complexes conjuguées, c'est-à-dire prennent des valeurs imaginaires conjuguées pour les vecteurs réels tangents à V_{2n} , ce qu'on notera: $\pi_{\beta*}^{\alpha*} = \overline{\pi_\beta^\alpha}$ ⁽¹⁾. On en déduit que la forme caractéristique $\psi = id\pi_\alpha^\alpha$ d'une H -connexion réelle satisfait à la relation $\dot{\psi} = \psi$. La forme ψ est donc réelle et définit une classe de cohomologie réelle indépendante du choix de la H -connexion réelle ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Une telle connexion est une connexion presque hermitienne au sens de A. Lichnerowicz.

⁽²⁾ Si V_{2n} est une variété hermitienne compacte et si ψ désigne la forme caractéristique de la deuxième connexion canonique, la forme $-(2\pi)^{-1}\psi$ coïncide avec la forme Ψ_n définie par S. S. Chern dans [5] pour déterminer la « n ème classe caractéristique de base ».

Soit V_{2n} une variété presque hermitienne au sens large munie d'une H -connexion. z étant une base H -adaptée en un point de V_{2n} , désignons par σ_z le groupe d'holonomie restreint de la connexion en z . σ_z est sous-groupe de $\Gamma(n)$, groupe structural de l'espace fibré $E_H(V_{2n})$. Considérons le sous-groupe invariant $S\Gamma(n)$ de $\Gamma(n)$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix},$$

pour lesquelles le déterminant de A est égal à 1. Si σ_z est sous-groupe de $S\Gamma(n)$, il en est de même du groupe d'holonomie restreint $\sigma_{z'}$ en z' , base H -adaptée quelconque relative à un point arbitraire de V_{2n} . Nous dirons alors, par abus de langage, que le groupe d'holonomie homogène restreint de la connexion est sous-groupe de $S\Gamma(n)$. Le théorème du chapitre II, paragraphe 7, entraîne.

THÉOREME. *Pour que le groupe d'holonomie homogène restreint d'une H -connexion soit sous-groupe de $S\Gamma(n)$, il faut et il suffit que la forme caractéristique de la H -connexion soit nulle en tout point.*

CHAPITRE IV

CAS PARTICULIERS DE STRUCTURES PRESQUE HERMITIENNES AU SENS LARGE

Nous examinons dans ce chapitre des particularités qui peuvent se présenter dans l'étude d'une structure presque hermitienne au sens large. Nous cherchons à les traduire par la nullité de certains tenseurs construits à partir de la forme fondamentale et de sa dérivée covariante dans la connexion riemannienne.

Nous adoptons les dénominations usuelles du cas presque hermitien au sens ordinaire, les mots « au sens large » étant sous-entendus. Conformément à la terminologie de C. Ehresmann, la Π -structure définie par la donnée de la structure presque hermitienne est désignée par Π -structure *sous-jacente* (à la structure presque hermitienne).

1. Structures hermitiennes et pseudohermitiennes.

Étant donnée une structure presque hermitienne au sens large sur une variété différentiable V_{2n} , nous dirons qu'elle est *hermitienne* si la Π -structure sous-jacente est intégrable. Soit $x_0 \in V_{2n}$; il existe $2n$ fonctions à valeurs complexes (z^i) , définies dans un voisinage ouvert U de x_0 , telles que, en chaque point x de U , les sous-espaces T_1 , resp. T_2 , déterminant la Π -structure puissent

être définis par $dz^{\alpha*} = 0$, resp. $dz^\alpha = 0$. La base de T_x^C duale de (dz^i) est adaptée à la Π -structure. Par rapport à cette base on a donc

$$ds^2 = 2g_{\alpha\beta*} dz^\alpha dz^{\beta*},$$

$$F = \lambda g_{\alpha\beta*} dz^\alpha \wedge dz^{\beta*}.$$

La Π -structure sous-jacente à une structure hermitienne est nécessairement sans torsion. Inversement donnons-nous une structure presque hermitienne pour laquelle la Π -structure sous-jacente soit sans torsion: une telle structure sera dite *pseudohermitienne*. Dans le cas analytique, c'est-à-dire si V_{2n} et la Π -structure sont de classe C^ω , une structure pseudohermitienne est hermitienne.

Soit V_{2n} une variété presque hermitienne au sens large. Donnons-nous sur V_{2n} une connexion linéaire sans torsion, dont les composantes relatives à une section locale de $E_\Pi(V_{2n})$ sont (γ_j^i) . Le tenseur de torsion de la Π -structure a pour composantes (cf. chap. II, § 6-B)

$$t_{\beta*}^{\alpha}{}_{\gamma*} = \gamma_{\beta*}^{\alpha}{}_{\gamma*} - \gamma_{\gamma*}^{\alpha}{}_{\beta*},$$

$$t_{\beta}^{\alpha*}{}_{\gamma} = \gamma_{\beta}^{\alpha*}{}_{\gamma} - \gamma_{\gamma}^{\alpha*}{}_{\beta},$$

les autres composantes étant nulles. Prenons en particulier la connexion riemannienne. Soit $(\nabla_k F_j^i)$ la dérivée covariante du tenseur (F_j^i) dans cette connexion. Relativement à des bases H -adaptées on a

$$\gamma_{\beta*}^{\alpha}{}_{\gamma*} = -\frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma*} F_{\beta*}^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma*} F_{\alpha* \beta*},$$

$$\gamma_{\beta}^{\alpha*}{}_{\gamma} = -\frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma} F_{\beta}^{\alpha*} = \frac{1}{2\lambda} \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta}.$$

Pour que la Π -structure soit sans torsion, il faut et il suffit que $\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta}$, resp. $\nabla_{\gamma*} F_{\alpha*\beta*}$, soient symétriques par rapport à β et γ , resp. β^* et γ^* . Mais, $\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta}$, resp. $\nabla_{\gamma*} F_{\alpha*\beta*}$, étant antisymétriques par rapport à α et β , resp. α^* et β^* , une telle condition de symétrie implique $\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0$, resp. $\nabla_{\gamma*} F_{\alpha*\beta*} = 0$ ⁽¹⁾. Nous énoncerons

(1) En effet, si $\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta}$ est symétrique par rapport à β et γ , on a (quels que soient α, β, γ)

$$\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = -\nabla_{\beta} F_{\alpha\gamma} = -\nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha} = -\nabla_{\alpha} F_{\gamma\beta}$$

et

$$\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = -\nabla_{\gamma} F_{\beta\alpha} = -\nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} = \nabla_{\alpha} F_{\gamma\beta}.$$

Donc

$$\nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0.$$

THÉOREME. *Pour qu'une structure presque hermitienne soit pseudohermitienne, il faut et il suffit que, relativement à des bases H-adaptées, on ait en tout point*

$$(1) \quad \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_{\gamma^*} F_{\alpha^*\beta^*} = 0,$$

ou, de façon équivalente,

$$(2) \quad \gamma_{\beta}^{\alpha^*} = 0, \quad \gamma_{\beta^*}^{\alpha} = 0.$$

Les conditions (1) ou (2) restent valables par rapport à toute base II-adaptée. Par rapport à une base quelconque, les structures pseudohermitiennes peuvent être caractérisées par

$$(3) \quad F_k^h \nabla_h F_{ij} + F_j^h \nabla_k F_{ih} = 0.$$

En effet le premier membre de (3) définit un tenseur (p_{ijk}) tel que l'on ait par rapport à une base II-adaptée

$$p_{\alpha\beta\gamma} = 2\lambda \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad p_{\alpha^*\beta^*\gamma^*} = -2\lambda \nabla_{\gamma^*} F_{\alpha^*\beta^*},$$

les autres composantes étant nulles.

Étant donnée une structure pseudohermitienne sur une variété différentiable V_{2n} , la forme de torsion de la connexion de Chern-Libermann est déterminée, relativement à des bases II-adaptées, par les formules

$$(4) \quad \mathcal{T}^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} \nabla^{\alpha} F_{\beta\gamma} \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma},$$

$$(5) \quad \mathcal{T}^{\alpha^*} = \frac{-1}{2\lambda} \nabla^{\alpha^*} F_{\beta^*\gamma^*} \theta^{\beta^*} \wedge \theta^{\gamma^*},$$

qui résultent des formules (22) du chapitre III. La II-structure étant sans torsion, on obtient par différentiation extérieure des deux membres de (4) une expression de $d\mathcal{T}^{\alpha}$ ne contenant pas de terme de type (1, 2). Introduisons la forme de courbure (Ω_j^i) de la connexion et écrivons l'identité de Bianchi

$$(6) \quad d\mathcal{T}^i = \Omega_j^i \wedge \theta^j - c_{jk}^i \theta^k \wedge \mathcal{T}^j,$$

où les (c_{jk}^i) sont les composantes de la connexion. Relativement à des bases II-adaptées on a $c_{\beta^*k}^{\alpha} = c_{\beta^*k}^{\alpha^*} = 0$, $\Omega_{\beta^*}^{\alpha} = \Omega_{\beta^*}^{\alpha^*} = 0$. Il résulte alors de (6) que $\Omega_{\beta^*}^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$ ne contient pas non plus de terme de type (1, 2). Soit (R_{jkl}^i) le tenseur de courbure de la connexion, défini par

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l \quad (R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i).$$

On a donc

$$(7) \quad R^{\alpha}_{\beta, \gamma^* \delta^*} = 0.$$

De même on déduit de (5) et (6)

$$(8) \quad R^{\alpha^*}_{\beta^*, \gamma \delta} = 0.$$

Posons

$$(9) \quad R_{ij, kl} = g_{ih} R^h_{j, kl}.$$

$R_{ij, kl}$ est antisymétrique non seulement par rapport aux indices k et l , mais encore par rapport aux indices i et j ⁽¹⁾. Convenons de dire que deux indices sont de même type s'ils sont tous deux compris entre 1 et n , ou tous deux supérieurs à n . Alors on voit que, par rapport à toute base Π -adaptée, $R_{ij, kl}$ est nul dès que les indices i et j , ou les indices k et l , sont de même type.

2. Structures presque kählériennes.

Une structure presque hermitienne au sens large sur une variété différentiable V_{2n} sera dite *presque kählérienne* si la forme fondamentale F est fermée. Par rapport à une base quelconque cette condition se traduit par

$$(10) \quad \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = 0,$$

relation qui doit être vérifiée en tout point de V_{2n} et quels que soient i, j, k .

Si on prend des bases Π -adaptées, on peut décomposer les relations (10) en deux groupes

$$(11) \quad \nabla_{\gamma} F_{\alpha^* \beta^*} = 0, \quad \nabla_{\gamma^*} F_{\alpha \beta} = 0,$$

$$(12) \quad \nabla_{\gamma} F_{\alpha \beta} + \nabla_{\alpha} F_{\beta \gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma \alpha} = 0, \quad \nabla_{\gamma^*} F_{\alpha^* \beta^*} + \nabla_{\alpha^*} F_{\beta^* \gamma^*} + \nabla_{\beta^*} F_{\gamma^* \alpha^*} = 0.$$

Relativement à des bases H -adaptées, ces conditions peuvent aussi s'exprimer par

$$(13) \quad \gamma_{\beta^*}^{\alpha}{}_{\gamma} = 0, \quad \gamma_{\beta}^{\alpha^*}{}_{\gamma^*} = 0,$$

$$(14) \quad \gamma_{\beta}^{\alpha^*}{}_{\gamma} + \gamma_{\gamma}^{\beta^*}{}_{\alpha} + \gamma_{\alpha}^{\gamma^*}{}_{\beta} = 0, \quad \gamma_{\beta^*}^{\alpha}{}_{\gamma^*} + \gamma_{\gamma^*}^{\beta}{}_{\alpha^*} + \gamma_{\alpha^*}^{\gamma}{}_{\beta^*} = 0.$$

⁽¹⁾ On le voit aisément en prenant des bases H -adaptées (on a alors $\Omega_{\beta}^{\alpha} = -\Omega_{\alpha^*}^{\beta^*}$). D'ailleurs cette propriété d'antisymétrie est vraie pour toute connexion euclidienne par rapport à la métrique (g_{ij}) .

On peut regarder les conditions (11) comme exprimant la nullité du tenseur (r_{ijk}) défini par

$$r_{\alpha^*\beta^*\gamma} = \nabla_\gamma F_{\alpha^*\beta^*}, \quad r_{\alpha\beta\gamma^*} = -\nabla_{\gamma^*} F_{\alpha\beta},$$

les autres composantes étant nulles. Par rapport à une base quelconque

$$(15) \quad r_{ijk} = \frac{1}{2\lambda} (F_k^h \nabla_h F_{ij} - F_j^h \nabla_h F_{ih}).$$

De même les conditions (12) expriment la nullité du tenseur (s_{ijk}) défini par

$$s_{\alpha\beta\gamma} = \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha}, \quad s_{\alpha^*\beta^*\gamma^*} = -(\nabla_{\gamma^*} F_{\alpha^*\beta^*} + \nabla_{\alpha^*} F_{\beta^*\gamma^*} + \nabla_{\beta^*} F_{\gamma^*\alpha^*}),$$

les autres composantes étant nulles. Par rapport à une base quelconque on a

$$(16) \quad s_{ijk} = \frac{1}{2\lambda} (p_{ijk} + p_{jki} + p_{kij}),$$

où l'on a posé (cf. § 1)

$$p_{ijk} = F_k^h \nabla_h F_{ij} + F_j^h \nabla_h F_{ih}.$$

Il peut être intéressant dans l'étude de certains problèmes d'envisager des structures presque hermitiennes pour lesquelles soit les conditions (11), soit les conditions (12), sont seules supposées remplies. En particulier on vérifie que les conditions (11) sont nécessaires et suffisantes pour que la connexion de Chern-Libermann coïncide avec celle de Lichnerowicz. On peut encore dire que les conditions (11) sont nécessaires et suffisantes pour que la torsion de la connexion de Lichnerowicz coïncide avec la torsion de la Π -structure.

3. Structures kählériennes et pseudokählériennes.

Une structure presque hermitienne au sens large sur une variété différentiable V_{2n} sera dite *kählérienne* (resp. *pseudokählérienne*) si la Π -structure sous-jacente est intégrable (resp. sans torsion) et la forme fondamentale F fermée. En d'autres termes une structure presque hermitienne est kählérienne (resp. pseudokählérienne) si elle est à la fois hermitienne (resp. pseudohermitienne) et presque kählérienne.

Pour qu'une structure presque hermitienne soit pseudokählérienne, il faut et il suffit que, en tout point V_{2n} , on ait par rapport à des bases Π -adaptées

$$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_{\gamma^*} F_{\alpha^*\beta^*} = 0,$$

$$\nabla_\gamma F_{\alpha^*\beta^*} = 0, \quad \nabla_{\gamma^*} F_{\alpha\beta} = 0,$$

c'est-à-dire que la dérivée covariante de (F_{ij}) dans la connexion riemannienne soit nulle. On en déduit

THÉOREME. *Pour qu'une structure presque hermitienne soit pseudokählérienne, il faut et il suffit que la connexion riemannienne soit une II-connexion, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec la connexion de Lichnerowicz.*

Il revient au même de dire que la connexion riemannienne (qui est euclidienne) est une H -connexion, ou encore qu'elle coïncide avec celle de Chern-Libermann.

Soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une structure pseudokählérienne: nous dirons brièvement que V_{2n} est une variété pseudokählérienne. Si z est une base H -adaptée en un point de V_{2n} , le groupe d'holonomie Ψ_z de la connexion riemannienne en z est sous-groupe de $\Gamma(n)$. Inversement soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une métrique complexe (g_{ij}) et supposons qu'au point x de V_{2n} il existe une base z adaptée à la métrique (au sens du chapitre III, § 5) telle que le groupe d'holonomie Ψ_z de la connexion riemannienne en z soit sous-groupe de $G(n, n)$. Alors on sait que Ψ_z est sous-groupe de $\Gamma(n)$ et que, par suite, on peut douer V_{2n} d'une structure presque hermitienne dont la métrique coïncide avec (g_{ij}) et telle que la connexion riemannienne soit une H -connexion. Cette structure est donc pseudokählérienne.

Si V_{2n} est une variété pseudokählérienne, les composantes (R^i_{jkl}) du tenseur de courbure de la connexion riemannienne par rapport à une base II-adaptée satisfont aux relations (7) et (8) du paragraphe 1. La forme caractéristique de la connexion est alors définie par

$$(17) \quad \psi = \lambda R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma*} \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma*}.$$

Or, la connexion riemannienne étant sans torsion, l'identité de Bianchi (6) se traduit par

$$R^i_{jkl} + R^i_{ljk} + R^i_{kjl} = 0.$$

On en déduit

$$R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma*} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma*}.$$

Introduisons le tenseur de Ricci, défini par

$$R_{ij} = R^k_{i \cdot kj}.$$

On a

$$R_{\beta\gamma} = 0, \quad R_{\beta\alpha\gamma*} = 0,$$

$$R_{\beta\gamma*} = R_{\gamma\beta} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma*}.$$

On en déduit

$$(18) \quad \psi = \lambda R_{\beta\gamma^*} \theta^\beta \wedge \theta^{\gamma^*}.$$

Le théorème du chapitre III, § 6, s'applique alors aux structures pseudokähleriennes sous la forme suivante:

THÉORÈME. *Sur une variété pseudokählienne V_{2n} , la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe d'holonomie homogène restreint de la connexion riemannienne soit sous-groupe de $SI'(n)$ (au sens du chapitre III, § 6) est que le tenseur de Ricci soit nul en tout point.*

CHAPITRE V

II-STRUCTURES RÉELLES ET STRUCTURES PRESQUE PARAHERMITIENNES

Nous étudions dans ce chapitre les II-structures réelles et les structures presque hermitiennes au sens large réelles; celles-ci coïncident avec les structures presque parahermitiennes de P. Libermann. Nous leur appliquons les résultats des chapitres précédents. En outre, nous montrons qu'à toute structure presque parahermitienne on peut associer une classe de structures presque complexes et nous utilisons ce résultat pour étudier le problème d'existence d'une structure presque parahermitienne sur une variété différentiable V_{2n} , notamment dans le cas $n = 1$.

1. Définition des II-structures réelles.

Soit V_m une variété différentiable (de classe C^∞) de dimension m . Nous désignerons par T_x l'espace vectoriel tangent au point $x \in V_m$, par T_x^C son complexifié.

Une II-structure réelle (nous dirons brièvement: II_R -structure) ou structure de presque-produit réel est définie sur V_m par la donnée de deux champs, de classe C^∞ , de sous-espaces propres supplémentaires de T_x , T_1 et T_2 (dim. $T_1 = n_1 \neq 0$; dim. $T_2 = n_2 \neq 0$; $n_1 + n_2 = m$) ⁽¹⁾.

Soit T_1^C (resp. T_2^C) l'espace vectoriel complexifié de T_1 (resp. T_2). T_1^C et T_2^C peuvent être identifiés à deux sous-espaces propres supplémentaires de T_x^C . Une II_R -structure détermine donc canoniquement une II-structure au sens du chapitre II.

⁽¹⁾ Si m est pair et si $n_1 = n_2 = m/2$, on a une structure presque paracomplexe (P. Libermann [19]).

L'opérateur $\mathbb{I}$ associé, correspondant à la valeur $\lambda = 1$, laisse T_x invariant: nous dirons qu'il est *réel*. Il est tel que

$$(1) \quad \mathbb{I}^2 = \text{Identité.}$$

Si on introduit le tenseur réel (F_j^i) associé, (1) se traduit par

$$(1') \quad F_h^i F_j^h = \delta_j^i,$$

où δ_j^i est le symbole de Kronecker. Dans l'étude des Π_R -structures il sera toujours sous-entendu qu'on a fait ce choix de la valeur $\lambda = 1$.

Plus généralement supposons donnée sur V_m une Π -structure telle que l'opérateur $\mathbb{I}$ associé, correspondant à une valeur λ , soit réel. Désignons par u le vecteur complexe conjugué d'un vecteur u de T_x^C ; $\overline{\mathbb{I}u}$ est complexe conjugué de $\mathbb{I}u$. Soit $\tilde{T}_1$ (resp. $\tilde{T}_2$) le sous-espace de T_x^C engendré par les vecteurs propres de $\mathbb{I}$ associés à la valeur propre λ (resp. $-\lambda$); T_x^C est somme directe de $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ ⁽¹⁾. Puisque $\mathbb{I}^2 = \lambda^2$ (Identité), λ^2 est réel. Nous distinguerons deux cas:

a) λ imaginaire pur. Soit $(e_1, \dots, e_{n_1})$ une base de $\tilde{T}_1$ ($n_1 = \dim. \tilde{T}_1$). Les vecteurs $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_{n_1}$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre $-\lambda$; ils appartiennent donc à $\tilde{T}_2$. On voit même qu'ils en constituent une base. Nécessairement m est pair et les sous-espaces $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ sont complexes conjugués. V_m est munie d'une structure *presque complexe*. L'opérateur $\mathbb{I}' = \frac{i}{\lambda} \mathbb{I}$ est encore réel et a pour carré ($-\text{Identité}$).

b) λ réel. Si $v \in T_x$, $v_1 = v + \frac{1}{\lambda} \mathbb{I}v$ et $v_2 = v - \frac{1}{\lambda} \mathbb{I}v$ sont réels. Par suite tout vecteur réel est la somme d'un vecteur réel de $\tilde{T}_1$ et d'un vecteur réel de $\tilde{T}_2$. Soit T_1 (resp. T_2) le sous-espace de T_x formé par les vecteurs réels de $\tilde{T}_1$ (resp. $\tilde{T}_2$). T_1 et T_2 sont supplémentaires. D'ailleurs ni T_1 ni T_2 n'est réduit à 0, sinon $\tilde{T}_1$ ou $\tilde{T}_2$ le serait aussi (hypothèse exclue dans la définition des Π -structures). V_m est ainsi munie d'une Π_R -structure. L'opérateur $\mathbb{I}' = \frac{1}{\lambda} \mathbb{I}$ est encore réel et a pour carré (Identité).

Étant donnée une variété différentiable V_m munie d'une Π_R -structure, on peut toujours introduire sur V_m une métrique riemannienne définie positive telle

(1) Dans les chapitres II et III nous avons désigné ces sous-espaces par T_1 et T_2 .

que T_1 et T_2 soient orthogonaux. En effet il suffit de prendre une métrique riemannienne définie positive arbitraire (h_{ij}) et de poser

$$(2) \quad g_{ij} = h_{ij} + F_i^k F_j^l h_{kl}.$$

La métrique riemannienne définie par (g_{ij}) satisfait aux conditions énoncées.

2. - Torsion et intégrabilité.

Puisqu'une Π_R -structure détermine canoniquement une Π -structure, les notions introduites et les résultats obtenus au chapitre II sont applicables aux Π_R -structures. De plus nous pourrions supposer que les éléments géométriques envisagés sont réels.

C'est ainsi que, sur une variété différentiable V_m munie d'une Π_R -structure, nous appellerons *base adaptée à la Π_R -structure* ou, brièvement, *base Π_R -adaptée* toute base (e_i) de T_x telle que $e_\alpha \in T_1$, $e_A \in T_2$ (α et tout indice grec $= 1, \dots, n_1$; A et tout indice majuscule latin $= n_1 + 1, \dots, m$). Une telle base est à la fois réelle et Π -adaptée. L'ensemble $E_\Pi^R(V_m)$ des bases Π_R -adaptées relatives aux différents points de V_m admet une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_m , dont le groupe structural est le sous-groupe $G(n_1, n_2; R)$ de $GL(m, R)$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $A \in GL(n_1, R)$, $B \in GL(n_2, R)$. $G(n_1, n_2; R)$ est isomorphe à $GL(n_1, R) \times GL(n_2, R)$. $E_\Pi^R(V_m)$ peut être identifié canoniquement à un sous-espace de $E_\Pi(V_m)$, espace des bases Π -adaptées.

Étant donnée une Π_R -structure, on peut dans la définition du tenseur de torsion de la Π -structure canoniquement associée (cf. chap. II, § 3) considérer un recouvrement de V_m par des ouverts munis chacun d'une section locale de $E_\Pi^R(V_m)$, identifiée à une section locale de $E_\Pi(V_m)$. On obtient alors un tenseur réel, qui est dit le *tenseur de torsion* de la Π_R -structure. On définit de même la *forme de torsion*, qui est une forme réelle.

Nous dirons qu'une Π_R -structure est *intégrable* si les champs de sous-espaces T_1 et T_2 sont intégrables: au voisinage de chaque point de V_m , T_1 (resp. T_2) peut être défini par $dz^A = 0$ (resp. $dz^\alpha = 0$), ou les (z^i) sont m fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ . Celles-ci peuvent être prises comme coordonnées locales sur l'ouvert où elles sont définies.

Le tenseur de torsion d'une Π_R -structure intégrable est nécessairement nul. Inversement supposons donnée sur V_m une Π_R -structure dont le tenseur de torsion soit nul. Reprenons le raisonnement du chapitre II, § 3, étant entendu que les éléments introduits sont réels. T_2 peut être défini localement par le système différentiel

$$(F_j^i + \delta_j^i) dx^j = 0,$$

où F_j^i est une fonction réelle de classe C^∞ des coordonnées locales (x^i) . Ce système, qui doit être de rang n_1 , est équivalent à un système comportant n_1 équations

$$(3) \quad \theta^\alpha \equiv B_i^\alpha dx^i = 0,$$

où les (B_i^α) sont des fonctions réelles de classe C^∞ . De même T_1 peut être défini localement par un système différentiel comportant n_2 équations

$$(4) \quad \theta^A \equiv B_i^A dx^i = 0,$$

où les (B_i^A) sont des fonctions réelles de classe C^∞ . La nullité de la torsion entraîne

$$d\theta^\alpha = \frac{1}{2} c_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma + c_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^C,$$

$$d\theta^A = \frac{1}{2} c_{B\gamma}^A \theta^B \wedge \theta^\gamma + c_{B\gamma}^A \theta^B \wedge \theta^C.$$

Les conditions de Frobenius de complète intégrabilité sont vérifiées pour chacun des systèmes (3) et (4). Puisqu'on est dans le domaine réel, il n'est pas nécessaire ici d'introduire l'hypothèse d'analyticité. On en déduit l'existence de n_1 fonctions (z^α) [resp. n_2 fonctions (z^A)] réelles de classe C^∞ , telles que (3) [resp. (4)] soit équivalent à $dz^\alpha = 0$ (resp. $dz^A = 0$). La Π_R -structure est donc intégrable. Nous énoncerons

THÉORÈME. *Pour qu'une Π -structure réelle soit intégrable, il faut et il suffit qu'elle soit sans torsion.*

La définition des opérateurs C et M associés à une Π_R -structure sera la même que pour les Π -structures. Ils transforment une forme réelle en une forme réelle. La relation fondamentale s'écrit de la même manière et conduit aux résultats suivants:

a) L'expression du tenseur de torsion en coordonnées locales est

$$t_{jk}^i = \frac{1}{4} [F_k^l (\partial_i F_j^l - \partial_j F_i^l) - F_j^l (\partial_i F_k^l - \partial_k F_i^l)].$$

b) Étant donnés deux champs de vecteurs u et v , on a, avec les mêmes notations qu'au chapitre II, § 5,

$$[u, v] + [\mathbb{I}u, \mathbb{I}v] - \mathbb{I}[\mathbb{I}u, v] + \mathbb{I}[\mathbb{I}v, u] = -4T(u, v).$$

c) La condition nécessaire et suffisante pour qu'une Π -structure réelle soit sans torsion (on peut dire aussi: intégrable) est que, pour toute forme φ réelle de classe C^∞ définie sur V_m , d'un degré donné $r \leq m - 2$, on ait

$$(d\tilde{d} + \tilde{d}d)\varphi = 0,$$

où $\tilde{d}$ est l'opérateur sur les formes $C^{-1}dC$.

On peut définir aussi les Π_R -connexions, connexions infinitésimales sur l'espace fibré principal $E_\Pi^R(V_m)$. Elles s'identifient aux connexions linéaires réelles pour lesquelles le tenseur (F_j^i) est à différentielle absolue nulle. Les résultats obtenus au chapitre II pour les Π -connexions s'adaptent aisément au cas des Π_R -connexions. En particulier on peut associer à toute Π_R -connexion des formes caractéristiques ψ_1 et ψ_2 , qui sont réelles.

3. Structures presque parahermitiennes.

Soit V_m une variété différentiable munie d'une Π_R -structure, définie en chaque point x par un opérateur linéaire $\mathbb{I}$ sur T_x de carré (Identité). Supposons en outre donnée sur V_m une métrique riemannienne de classe C^∞ , c'est-à-dire un tenseur symétrique réel (g_{ij}) de classe C^∞ , le déterminant des (g_{ij}) étant partout non nul. Conformément à la terminologie adoptée dans le chapitre III, nous dirons que la métrique est hermitienne par rapport à $\mathbb{I}$ si l'on a en chaque point x de V_m et pour tout couple de vecteurs v, w de T_x

$$(\mathbb{I}v, \mathbb{I}w) = -(v, w),$$

où (v, w) désigne le produit scalaire $g_{ij}v^i w^j$. V_m est alors munie d'une structure presque hermitienne au sens large. Nécessairement m est pair: $m = 2n$; et $n_1 = n_2 = n$.

Reprenons les notations du chapitre III. Posons en particulier

$$F_{ij} = F_i^k g_{kj}.$$

Les (F_{ij}) sont les composantes d'une 2-forme extérieure réelle F . Il existe, au point x de V_{2n} , des bases réelles telles que, (θ^i) désignant la cobase duale et ds^2 la forme quadratique définie par la métrique, on ait

$$(5) \quad ds^2 = 2 \sum_{\alpha} \theta^{\alpha} \theta^{\alpha*},$$

$$(6) \quad F = \sum_{\alpha} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha*}$$

($\alpha = 1, \dots, n$; $\alpha^* = \alpha + n$). Ces relations montrent que les structures envisagées sont celles étudiées par P. Libermann [19] sous le nom de structures presque parahermitiennes ⁽¹⁾. Si on écrit (5) sous la forme

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\theta^{\alpha} + \theta^{\alpha*})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\theta^{\alpha} - \theta^{\alpha*})^2,$$

on voit que la métrique est de signature n .

Toute base par rapport à laquelle on a les relations (5) et (6) sera dite *adaptée à la structure presque parahermitienne* ou, brièvement, *H_R -adaptée*. Toute base H_R -adaptée est Π_R -adaptée. L'ensemble $E_H^R(V_{2n})$ des bases H_R -adaptées relatives aux différents points de V_{2n} admet une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_{2n} , dont le groupe structural est le sous-groupe $\Gamma(n, R)$ de $GL(2n, R)$ constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

pour lesquelles A et B appartiennent à $GL(n, R)$ et $B = {}^t A^{-1}$. $\Gamma(n, R)$ est isomorphe à $GL(n, R)$. Le déterminant de toute matrice de $\Gamma(n, R)$ est égal à 1. La structure presque parahermitienne détermine donc une orientation de V_{2n} .

Nous appelons *connexion presque parahermitienne* (brièvement: *H_R -connexion*) toute connexion infinitésimale sur $E_H^R(V_{2n})$. Les H_R -connexions peuvent être identifiées aux connexions linéaires réelles pour lesquelles les tenseurs (F_j^i) et (g_{ij}) sont à différentielle absolue nulle. Les propriétés obtenues au chapitre III (§§ 4 et 5) pour les H -connexions s'appliquent aux H_R -connexions, les éléments complexes étant remplacés par des éléments réels. En particulier on peut définir, comme dans le cas général des structures presque hermitiennes au sens large, les connexions canoniques de Lichnerowicz et de Chern-Libermann. On définit aussi une forme caractéristique ψ , réelle, associée à toute connexion presque parahermitienne.

⁽¹⁾ Pour obtenir les formules de P. Libermann (avec des notations différentes), il suffit de remplacer la cobase (θ^i) par la cobase $(\theta^{i'})$ telle que $\theta^{i'} = \sqrt{2} \theta^i$ et la forme F par la forme $2F$. Précisons aussi que P. Libermann ne suppose pas systématiquement, comme nous l'avons fait dans ce travail, que les éléments introduits sont de classe C^{∞} .

Enfin les cas particuliers étudiés au chapitre IV peuvent être envisagés pour les structures presque parahermitiennes. Mais ici, la nullité de la torsion de la Π_R -structure sous-jacente étant équivalente à l'intégrabilité, il n'y a pas lieu de distinguer entre « hermitiennes » et « pseudohermitiennes ». À titre d'exemple nous énoncerons les théorèmes suivants, relatifs aux structures *parakählériennes*, c'est-à-dire aux structures presque parahermitiennes pour lesquelles la Π_R -structure sous-jacente est intégrable et la forme fondamentale fermée.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une structure presque parahermitienne soit parakählérienne, il faut et il suffit que la connexion riemannienne coïncide avec la connexion de Lichnerowicz.*

Soit $S\Gamma(n, R)$ le sous-groupe de $\Gamma(n, R)$ constitué par les matrices de $\Gamma(n, R)$ pour lesquelles le déterminant de A est égal à 1. Nous dirons que le groupe d'holonomie homogène restreint σ d'une H_R -connexion est sous-groupe de $S\Gamma(n, R)$ si, z étant une base H_R -adaptée, le groupe d'holonomie restreint σ_z en z est lui-même sous-groupe de $S\Gamma(n, R)$. Nous pouvons alors énoncer

THÉORÈME 2. *Si une variété différentiable V_{2n} est munie d'une structure parakählérienne, la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe d'holonomie homogène restreint de la connexion riemannienne soit sous-groupe de $S\Gamma(n, R)$ est que le tenseur de Ricci soit nul en tout point.*

4. *Structures presque complexes associées à une structure presque parahermitienne.*

Soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une structure presque paracomplexe, définie en chaque point x par deux sous-espaces supplémentaires T_1 et T_2 de T_x de dimension n . En reprenant le raisonnement du chapitre III, paragraphe 3, et en se restreignant à des éléments réels, on voit que, si cette structure admet une structure presque parahermitienne subordonnée, l'ensemble des bases H_R -adaptées, spéciales pour une métrique riemannienne définie positive donnée, a une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_{2n} , dont le groupe structural est constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

où A appartient au groupe orthogonal $O(n)$. Inversement, si l'espace fibré $E_{\Pi}^R(V_{2n})$ des bases Π_R -adaptées admet un sous-espace fibré principal ayant ce groupe

structural, on peut douer V_{2n} d'une structure presque parahermitienne subordonnée à la structure presque paracomplexe. On en déduit

THÉORÈME. *Pour qu'une structure presque paracomplexe, déterminée sur une variété différentiable V_{2n} par deux champs de sous-espaces supplémentaires T_1 et T_2 de l'espace vectoriel tangent ($\dim. T_1 = \dim. T_2 = n$), admette une structure presque parahermitienne subordonnée, il faut et il suffit que l'on puisse définir un champ différentiable d'isomorphismes de T_1 sur T_2 .*

À un tel champ d'isomorphismes, que nous désignerons par S , nous associerons une structure presque complexe de la façon suivante. v étant un vecteur quelconque de T_x , somme d'un vecteur $P_1 v \in T_1$ et d'un vecteur $P_2 v \in T_2$, posons

$$(7) \quad \tilde{\mathbb{I}} v = S P_1 v - S^{-1} P_2 v.$$

On a

$$\tilde{\mathbb{I}}^2 v = \tilde{\mathbb{I}} S P_1 v - \tilde{\mathbb{I}} S^{-1} P_2 v = - S^{-1} S P_1 v - S S^{-1} P_2 v = - v.$$

$\tilde{\mathbb{I}}$ définit donc une structure presque complexe. On a de plus

$$(8) \quad \tilde{\mathbb{I}} T_1 = T_2.$$

Inversement, étant donnée sur V_{2n} une structure presque complexe, définie en chaque point x par un opérateur linéaire $\tilde{\mathbb{I}}$ sur T_x de carré ($-$ Identité), supposons que la condition (8) soit satisfaite en tout point. La restriction S de $\tilde{\mathbb{I}}$ à T_1 définit alors un isomorphisme de T_1 sur T_2 et $\tilde{\mathbb{I}}$ peut être défini à partir de S par la formule (7).

La condition (8) caractérise donc les structures presque complexes que nous associons aux champs d'isomorphismes de T_1 sur T_2 . Elle peut être mise sous une autre forme en introduisant l'opérateur linéaire $\mathbb{I}$ sur T_x de carré (Identité) définissant la structure presque paracomplexe. (8) entraîne, pour tout vecteur $v \in T_x$,

$$\mathbb{I} \tilde{\mathbb{I}} v = \mathbb{I} \tilde{\mathbb{I}} (P_1 v + P_2 v) = - \tilde{\mathbb{I}} P_1 v + \tilde{\mathbb{I}} P_2 v.$$

Or

$$\tilde{\mathbb{I}} \mathbb{I} v = \tilde{\mathbb{I}} (P_1 v - P_2 v).$$

On a donc

$$(9) \quad (\mathbb{I} \tilde{\mathbb{I}} + \tilde{\mathbb{I}} \mathbb{I}) v = 0 \quad \text{quel que soit } v \in T_x.$$

Inversement, si (9) est satisfaite, on a pour tout vecteur $v \in T_1$

$$\mathbb{I}(\tilde{\mathbb{I}}v) = -\tilde{\mathbb{I}}(\mathbb{I}v) = -\tilde{\mathbb{I}}v,$$

donc $\tilde{\mathbb{I}}v \in T_2$. $\tilde{\mathbb{I}}T_1$ étant de dimension n , on en déduit $\tilde{\mathbb{I}}T_1 = T_2$.

Nous énonçons

THÉORÈME. *Pour qu'une structure presque paracomplexe sur une variété différentiable V_{2n} admette une structure presque parahermitienne subordonnée, il faut et il suffit que l'on puisse définir sur V_{2n} une structure presque complexe telle que*

$$\mathbb{I}\tilde{\mathbb{I}} + \tilde{\mathbb{I}}\mathbb{I} = 0,$$

où $\mathbb{I}$ (resp. $\tilde{\mathbb{I}}$) est en chaque point de V_{2n} l'opérateur linéaire sur l'espace vectoriel tangent, de carré (Identité) [resp. ($-$ Identité)], déterminant la structure presque paracomplexe (resp. presque complexe) ⁽¹⁾.

Soit V_{2n} une variété différentiable munie d'une structure presque complexe, définie en chaque point x par un opérateur linéaire $\tilde{\mathbb{I}}$ sur T_x de carré ($-$ Identité). Supposons qu'il existe sur V_{2n} un champ différentiable de sous-espaces vectoriels T_1 de dimension n de T_x , tel que l'on ait en chaque point x : $T_1 \cap \tilde{\mathbb{I}}T_1 = 0$. Alors les sous-espaces T_1 et $T_2 = \mathbb{I}T_1$ de T_x déterminent sur V_{2n} une structure presque paracomplexe admettant une structure presque parahermitienne subordonnée. Nous énonçons

THÉORÈME. *Pour qu'une variété différentiable V_{2n} puisse être douée d'une structure presque parahermitienne, il faut et il suffit que l'on puisse définir sur V_{2n} une structure presque complexe et un champ différentiable de sous-espaces vectoriels tangents T_1 de dimension n , tels que*

$$(10) \quad T_1 \cap \tilde{\mathbb{I}}T_1 = 0,$$

où $\tilde{\mathbb{I}}$ est en chaque point de V_{2n} l'opérateur linéaire sur l'espace vectoriel tangent, de carré ($-$ Identité), déterminant la structure presque complexe.

En particulier prenons une variété différentiable V_2 de dimension 2. Si l'on a défini sur V_2 une structure presque complexe et un champ différentiable de

⁽¹⁾ L'existence d'une structure presque complexe sur une variété différentiable V_{2n} munie d'une structure presque parahermitienne peut encore être déduite des résultats de C. Ehresmann [7] et de A. Lichnerowicz [22]. La forme fondamentale F de la structure presque parahermitienne est en effet une 2-forme réelle, partout de rang $2n$. Il existe donc une structure presque hermitienne au sens ordinaire admettant F comme forme fondamentale.

sous-espaces vectoriels tangents de dimension 1 (nous dirons brièvement: champ de *directions* tangentes), la condition (10) se trouve toujours vérifiée. Or, pour que V_2 puisse être munie d'une structure presque complexe, il faut et il suffit qu'elle soit orientable ⁽¹⁾. Nous en déduisons

THÉOREME. Pour qu'une variété différentiable V_2 admette une structure presque parahermitienne, il faut et il suffit qu'elle soit orientable et que l'on puisse définir sur elle un champ différentiable de directions tangentes.

Soit V_2 un ruban de Möbius obtenu en identifiant les côtés ab et $a'b'$ d'un rectangle $ab'a'b$ (bords ab' et $a'b$ exclus). V_2 n'étant pas orientable n'admet pas de structure presque parahermitienne. Or on peut définir sur V_2 une structure presque paracomplexe en menant en chaque point du rectangle les parallèles aux côtés. Nous avons ainsi un exemple de structure presque paracomplexe n'admettant pas de structure presque parahermitienne subordonnée.

Prenons maintenant une variété V_2 compacte. Pour que l'on puisse définir sur V_2 un champ différentiable de directions tangentes, il faut et il suffit que la caractéristique d'Euler-Poincaré soit nulle. Or toute variété V_2 compacte orientable satisfaisant à cette condition est un tore. Nous en déduisons

THÉOREME. Toute variété différentiable compacte à deux dimensions admettant une structure presque parahermitienne est un tore.

CHAPITRE VI

II-STRUCTURES HOMOGÈNES

Ce chapitre a pour objet l'étude des II-structures définies sur un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ et invariantes par G opérant sur V_m . Nous généralisons à ces structures des propriétés des structures homogènes presque complexes (A. Frölicher [10]). Puis nous appliquons les résultats obtenus aux espaces homogènes « réductifs ». Enfin nous étudions le cas des II-structures réelles homogènes.

⁽¹⁾ Toute variété différentiable munie d'une structure presque complexe est orientable. La réciproque est vraie en dimension 2. En effet, à l'aide d'une métrique riemannienne définie positive (g_{ij}) , on peut définir sur une variété V_2 orientable une 2-forme élément de volume (F_{ij}) ; le tenseur $F_j^i = F_{jk} g^{ik}$ détermine sur V_2 une structure presque complexe.

1. *Espaces homogènes de Lie.*

Pour fixer la terminologie, rappelons d'abord un certain nombre de définitions et propriétés relatives aux espaces homogènes de Lie.

Soient G un groupe de Lie connexe, H un sous-groupe fermé. Nous représenterons par G/H l'espace quotient de G par la relation d'équivalence $g_1^{-1}g_2 \in H$, munie de la topologie habituelle d'espace quotient et nous désignerons par p l'application $G \rightarrow G/H$ qui, à $g \in G$, fait correspondre la classe (gH) . G/H peut être doué d'une structure de variété analytique réelle V_m et p est analytique. G/H , par rapport à p , a une structure naturelle d'espace fibré principal de base V_m , de groupe structural H agissant sur lui-même par translation à gauche.

Donnons-nous un élément γ de G . Au point $x = pg$ ($g \in G$) de V_m , faisons correspondre le point

$$K_\gamma x = p(\gamma g).$$

$K_\gamma x$ est indépendant du choix de g dans $p^{-1}(x)$. G se présente ainsi comme un groupe transitif de transformations analytiques de V_m . Nous dirons que V_m , munie de la structure définie par le groupe d'opérateurs G , est un *espace homogène de Lie*.

L'ensemble des éléments de G laissant fixe le point $x = pg$ est le sous-groupe gHg^{-1} . Pour que G opère effectivement sur V_m , il faut et il suffit que H n'admette pas de sous-groupe invariant dans G autre que le sous-groupe $\{e\}$ réduit à l'élément-unité.

K'_γ désignera en chaque point de V_m l'application linéaire tangente à l'application K_γ : c'est une application linéaire de l'espace vectoriel T_x tangent au point x sur l'espace vectoriel $T_{K_\gamma x}$ tangent au point $K_\gamma x$. En particulier, au point $x_0 = pe$ et pour $h \in H$, K'_h est une application linéaire de T_{x_0} sur lui-même. H est ainsi représenté sur un groupe $\tilde{H}$ de transformations linéaires de T_{x_0} , qu'on appelle *groupe linéaire d'isotropie*. Si p' désigne l'application linéaire tangente à la projection p , on a pour tout vecteur u tangent en e à G

$$K'_h p' u = p'(adj.h)u,$$

où $(adj.h)$ est l'élément correspondant à $h \in H$ par la représentation adjointe de G . Le prolongement de l'application K'_γ aux tenseurs (réels ou complexes) définis sur T_x sera représenté par le même symbole.

2. Π -structures homogènes.

A. Donnons-nous sur l'espace homogène de Lie $V_m = G/H$ un champ de tenseurs réels ou complexes: soit t_x le tenseur du champ au point $x = pg$. Nous dirons que ce champ est *invariant par G* si

$$(1) \quad t_x = K'_g t_x$$

quel que soit $g \in p^{-1}(x)$. t_{x_0} est alors invariant par $\tilde{H}$. Inversement, à partir d'un tenseur défini au point x_0 et invariant par $\tilde{H}$, la formule (1) détermine sur V_m un champ de tenseurs invariant par G .

En particulier supposons qu'il existe au point x_0 un tenseur (F_j^i) , non proportionnel au tenseur de Kronecker (δ_j^i) , invariant par $\tilde{H}$ et tel que

$$(2) \quad F_h^i F_j^h = \lambda^2 \delta_j^i,$$

où λ est un nombre complexe non nul. On en déduit par la formule (1) un champ de tenseurs invariant par G , vérifiant la relation (2) en chaque point de V_m . Il détermine donc une Π -structure sur V_m . Nous dirons que V_m est alors munie d'une *Π -structure homogène*.

$T_{x_0}^C$ étant l'espace vectoriel complexifié de T_{x_0} , une Π -structure homogène peut donc être définie par la donnée sur $T_{x_0}^C$ d'un opérateur linéaire $\mathbb{I}$ non proportionnel à l'opérateur (Identité) - nous dirons brièvement d'un tel opérateur qu'il est « non trivial » - satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(2') \quad \mathbb{I}^2 = \lambda^2 (\text{Identité}),$$

$$(3) \quad K'_h \mathbb{I} = \mathbb{I} K'_h \quad \text{pour tout } h \in H.$$

(2') est la traduction de (2) en termes d'opérateurs; (3) exprime l'invariance de $\mathbb{I}$ par $\tilde{H}$.

On peut encore déterminer une Π -structure homogène par la donnée de deux sous-espaces propres supplémentaires de $T_{x_0}^C$, invariants par $\tilde{H}$.

B. Désignons par $\mathfrak{G}$ l'espace vectoriel tangent à G au point e , muni de sa structure d'algèbre de Lie, par $\mathfrak{G}^C$ son complexifié, par $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^C$ les éléments analogues relatifs au sous-groupe H de G . Choisissons dans $\mathfrak{G}^C$ un sous-espace M supplémentaire de $\mathfrak{H}^C$. L'application linéaire p' tangente à la projection p en e peut être prolongée à $\mathfrak{G}^C$. Par restriction à M , elle détermine un isomorphisme de M sur $T_{x_0}^C$, dont nous désignons par q' l'isomorphisme réciproque. À tout

opérateur linéaire $\mathbb{I}$ défini sur $T_{x_0}^G$ on peut associer l'opérateur linéaire $I: \mathfrak{G}^C \rightarrow M$, défini par

$$(4) \quad Iu = q' \mathbb{I} p' u \quad (u \in \mathfrak{G}^C).$$

Iu est nul si u appartient à $\mathfrak{H}^C$ et la restriction de I à M définit un opérateur non trivial si $\mathbb{I}$ est non trivial. Soit h un élément quelconque de H ; on a, quel que soit u ,

$$p'(adj. h)Iu = K'_h p' Iu = K'_h \mathbb{I} p' u$$

et

$$p' I(adj. h)u = \mathbb{I} p'(adj. h)u = \mathbb{I} K'_h p' u,$$

d'où

$$(5) \quad p'((adj. h)I - I(adj. h))u = (K'_h \mathbb{I} - \mathbb{I} K'_h) p' u.$$

Supposons que $\mathbb{I}$ satisfasse aux conditions (2') et (3). u étant un vecteur quelconque de $\mathfrak{G}^C$, nous désignerons par u_M le vecteur de M déduit de u par projection parallèlement au sous-espace vectoriel $\mathfrak{H}^C$. L'opérateur linéaire I associé à $\mathbb{I}$ est tel que

$$I^2 u = \lambda^2 u_M$$

et, d'après (5),

$$p'((adj. h)I - I(adj. h))u = 0$$

pour tout $h \in H$. On peut écrire

$$(6) \quad I^2 u \equiv \lambda^2 u,$$

$$(7) \quad (adj. h)Iu \equiv I(adj. h)u,$$

les congruences étant prises modulo le sous-espace vectoriel $\mathfrak{H}^C$.

Inversement soit I un opérateur linéaire sur $\mathfrak{G}^C$, nul sur $\mathfrak{H}^C$, satisfaisant aux relations (6) et (7) quels que soient $u \in \mathfrak{G}^C$ et $h \in H$. Désignons par M l'image de $\mathfrak{G}^C$ par I . (6) peut s'écrire

$$u - I\left(\frac{1}{\lambda^2} Iu\right) \equiv 0.$$

On en déduit que tout vecteur de $\mathfrak{G}^C$ est la somme d'un vecteur de M et d'un vecteur de $\mathfrak{H}^C$. De plus, si $u \in M \cap \mathfrak{H}^C$, on a $u = Iv$ ($v \in \mathfrak{G}^C$) et $Iu = 0$, donc $\lambda^2 v \in \mathfrak{H}^C$ et $u = 0$. On en déduit que M est supplémentaire de $\mathfrak{H}^C$ dans $\mathfrak{G}^C$.

Définissons comme précédemment l'isomorphisme q' de $T_{x_0}^C$ sur M . L'opérateur linéaire $\mathbb{I}$ défini sur $T_{x_0}^C$ par

$$\mathbb{I} = p' I q'$$

satisfait aux conditions (2') et (3). Il est non trivial si la restriction de I à M est un opérateur non trivial, ce qui revient à dire que les opérateurs $\frac{1}{\lambda} I$ et $-\frac{1}{\lambda} I$ ne sont pas idempotents.

Nous énoncerons

THÉOREME 1. *Pour qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ puisse être doué d'une II-structure homogène, il faut et il suffit que, λ étant un nombre complexe non nul donné, il existe sur $\mathfrak{G}^C$ un opérateur linéaire I , nul sur $\mathfrak{H}^C$, satisfaisant aux conditions suivantes :*

- a) *les opérateurs $\frac{1}{\lambda} I$ et $-\frac{1}{\lambda} I$ ne sont pas idempotents ;*
- b) *quels que soient $u \in \mathfrak{G}^C$ et $h \in H$, on a*

$$I^2 u \equiv \lambda^2 u \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}^C),$$

$$(adj. h) I u \equiv I (adj. h) u \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}^C).$$

Comme dans le cas presque complexe (A. Frölicher [10]), on peut remarquer que, si la condition (7) est vérifiée pour tout h , elle l'est en particulier pour les éléments $h = \exp(tv)$ du sous-groupe à un paramètre engendré par un élément v de $\mathfrak{H}$. Par passage aux algèbres de Lie, on en déduit que la condition (7) entraîne

$$(8) \quad [v, Iu] \equiv I[v, u]$$

quels que soient $u \in \mathfrak{G}^C$ et $v \in \mathfrak{H}$. I étant un opérateur linéaire sur $\mathfrak{G}^C$, cette relation s'étend aux éléments v de $\mathfrak{H}^C$. Inversement, si (8) est vérifiée, la condition (7) est satisfaite pour les éléments $h \in H$ tels que $(adj. h)$ appartienne à un sous-groupe à un paramètre engendré par un élément de l'algèbre de Lie du groupe $(adj. H)$. Si ce groupe est connexe, (7) est alors satisfaite quel que soit h . Nous énoncerons

THÉOREME 2. *Pour qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ puisse être doué d'une II-structure homogène, il faut que, λ étant un nombre complexe non nul donné, il existe sur $\mathfrak{G}^C$ un opérateur linéaire I , nul sur $\mathfrak{H}^C$, satisfaisant aux conditions suivantes :*

- a) les opérateurs $\frac{1}{\lambda}I$ et $-\frac{1}{\lambda}I$ ne sont pas idempotents;
 b) quels que soient $u \in \mathfrak{G}^C$ et $v \in \mathfrak{H}^C$, on a

$$I^2 u \equiv \lambda^2 u \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}^C),$$

$$[Iu, v] \equiv I[u, v] \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}^C).$$

Ces conditions sont suffisantes si $(adj.H)$ est connexe.

3. II-structures homogènes intégrables.

Nous allons étudier maintenant les II-structures homogènes qui sont *intégrables* au sens du chapitre II, § 3. Observons d'abord que, tout espace homogène de Lie étant une variété analytique réelle et l'application $(\gamma, x) \rightarrow K_\gamma x$ de $G \times V_m$ sur V_m étant analytique, une II-structure homogène sur V_m est de classe C^∞ . Par suite l'hypothèse de l'intégrabilité est équivalente à celle de la nullité de la torsion. Or la torsion est nulle en chaque point si elle est nulle au point $x_0 = pe$. Nous énoncerons

THÉORÈME 1. *Pour qu'une II-structure homogène sur un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ soit intégrable, il faut et il suffit que le tenseur de torsion soit nul au point $x_0 = pe$.*

Pour exprimer que le tenseur de torsion d'une II-structure homogène donnée est nul au point x_0 , nous nous servons de la relation (20) du chapitre II, § 5, reliant la torsion aux crochets de certains champs de vecteurs de V_m . En chaque point de V_m , soit $\mathbb{I}$ l'opérateur linéaire sur l'espace vectoriel tangent complexifié, de carré λ^2 (Identité), définissant la II-structure. Choisissons un sous-espace M supplémentaire de $\mathfrak{H}^C$ dans $\mathfrak{G}^C$. Par le procédé indiqué au paragraphe 2, nous associons à $\mathbb{I}$, pris au point x_0 , un opérateur linéaire I sur $\mathfrak{G}^C$, tel que $I\mathfrak{G}^C = M$. Étant donnés deux éléments u et v de $\mathfrak{G}^C$, faisons correspondre au couple (u, v) le vecteur $X(u, v)$ de $T_{x_0}^C$ défini par

$$(9) \quad X(u, v) = p'(\lambda^2[u, v] + [Iu, Iv] - I[Iu, v] + I[Iv, u]),$$

où le symbole $[u, v]$ représente le crochet de Lie de u et v ou, ce qui revient au même, le crochet des champs de vecteurs tangents à G invariants à gauche définis par u et v . Nous nous proposons de montrer que

$$(10) \quad X(u, v) = -4\lambda^2 T(p'u, p'v),$$

où T représente la forme de torsion de la II-structure au point x_0 .

Nous ferons d'abord deux remarques.

a) $X(u, v)$ ne change pas si on remplace u et v par des éléments ayant même projection sur $T_{x_0}^C$. En effet si on pose

$$\hat{u} = u + u_1 \quad \hat{v} = v + v_1,$$

où u_1 et v_1 appartiennent à $\mathfrak{H}^C$, on obtient

$$(11) \quad X(\hat{u}, \hat{v}) - X(u, v) = p'(\lambda^2[u, v_1] + \lambda^2[u_1, v] - I[Iu, v_1] + I[Iv, u_1]).$$

Or, la II-structure étant homogène, on peut écrire d'après (6) et (8)

$$I[Iu, v_1] = I^2[u, v_1] \equiv \lambda^2[u, v_1] \pmod{\mathfrak{H}^C},$$

$$I[Iv, u_1] = I^2[v, u_1] \equiv \lambda^2[v, u_1] \pmod{\mathfrak{H}^C}.$$

On en déduit que le second membre de (11) est nul.

b) $X(u, v)$ ne change pas si on remplace M par un autre sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{H}^C$ dans $\mathfrak{G}^C$. En effet soit $\hat{M}$ un tel sous-espace. Désignons par $\hat{I}$ l'opérateur linéaire sur $\mathfrak{G}^C$ associé à $\mathfrak{H}$ et $\hat{M}$, par $\hat{X}(u, v)$ le vecteur défini à partir de u, v et $\hat{I}$ par (9). I et $\hat{I}$ transforment tout élément de $\mathfrak{G}^C$ en des éléments ayant même projection sur $T_{x_0}^C$. On peut donc poser

$$\hat{I}u = Iu + \xi, \quad \hat{I}v = Iv + \eta,$$

où ξ et η appartiennent à $\mathfrak{H}^C$. On en déduit

$$[\hat{I}u, \hat{I}v] \equiv [Iu, Iv] + [Iu, \eta] + [\xi, Iv],$$

$$\hat{I}[\hat{I}u, v] \equiv I[\hat{I}u, v] = I[Iu, v] + I[\xi, v],$$

$$\hat{I}[\hat{I}v, u] \equiv I[\hat{I}v, u] = I[Iv, u] + I[\eta, u],$$

les congruences étant prises modulo $\mathfrak{H}^C$. Il en résulte que

$$(12) \quad \hat{X}(u, v) - X(u, v) = p'([Iu, \eta] + [\xi, Iv] - I[\xi, v] + I[\eta, u]).$$

La II-structure étant homogène, on a

$$[Iu, \eta] \equiv I[u, \eta], \quad [\xi, Iv] \equiv I[\xi, v].$$

On en déduit que le second membre de (12) est nul.

D'après ces deux remarques, nous pouvons toujours, pour calculer $X(u, v)$, supposer que M est le complexifié d'un sous-espace réel M_R supplémentaire de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$ et remplacer u et v par les vecteurs $\hat{u}$ et $\hat{v}$ de M ayant même projection

sur $T_{x_0}^C$. Suivant la méthode utilisée par A. Frölicher dans le cas presque complexe, nous considérons alors une section locale, tangente à M_R , de l'espace fibré G de base V_m et nous prenons, en chaque point de cette section locale, les vecteurs tangents à G déduits de $\hat{u}$ et $\hat{v}$ par translation à gauche. Par projection sur V_m nous définissons ainsi deux champs locaux de vecteurs tangents à V_m , U et V , tels que l'on ait au point x_0

$$(\lambda^2[U, V] + [\mathbb{I}U, \mathbb{I}V] - \mathbb{I}[\mathbb{I}U, V] + \mathbb{I}[\mathbb{I}V, U])_{x_0} = X(\hat{u}, \hat{v}).$$

La relation (20) du chapitre II donne comme valeur du premier membre

$$-4\lambda^2 T(U_0, V_0),$$

où $U_0 = p'\hat{u} = p'u$, $V_0 = p'\hat{v} = p'v$. On en déduit immédiatement la relation (10).

Il résulte de (10) que, si la Π -structure homogène est sans torsion, $X(u, v)$ est nul quels que soient u et $v \in \mathfrak{G}^C$. Inversement, comme tout vecteur de $T_{x_0}^C$ peut être considéré comme la projection d'un vecteur de $\mathfrak{G}^C$, la nullité de $X(u, v)$ pour tout couple (u, v) entraîne la nullité de la torsion. En observant que, pour un opérateur linéaire sur $\mathfrak{G}^C$, nul sur $\mathfrak{H}^C$, la condition $X(u, v) = 0$ jointe à la relation (6) entraîne la relation (8), nous pourrions énoncer

THÉORÈME 2. *Pour qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ puisse être doué d'une Π -structure homogène intégrable, il faut que, λ étant un nombre complexe non nul donné, il existe sur $\mathfrak{G}^C$ un opérateur linéaire I , nul sur $\mathfrak{H}^C$, satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) les opérateurs $\frac{1}{\lambda}I$ et $-\frac{1}{\lambda}I$ ne sont pas idempotents;

b) quels que soient les éléments u et v de $\mathfrak{G}^C$, on a

$$I^2u \equiv \lambda^2u \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}^C),$$

$$\lambda^2[u, v] + [Iu, Iv] - I[Iu, v] + [Iv, u] \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}^C).$$

Ces conditions sont suffisantes si $(\text{adj. } H)$ est connexe.

Comme dans le cas presque complexe, on peut énoncer des conditions équivalentes ne faisant pas intervenir explicitement l'opérateur I .

Étant donné un opérateur linéaire I sur $\mathfrak{G}^C$ satisfaisant aux conditions du théorème 2, désignons par L_1 , resp. L_2 , les sous-espaces de $\mathfrak{G}^C$ formés des éléments u tels que

$$Iu \equiv \lambda u, \quad \text{resp. } Iu \equiv -\lambda u \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}^C).$$

On a

$$(13) \quad L_1 + L_2 = \mathfrak{G}^C, \quad L_1 \cap L_2 = \mathfrak{H}^C$$

et ni L_1 ni L_2 ne coïncide avec $\mathfrak{G}^C$. L'indice i pouvant prendre les valeurs 1 et 2, soient u_i et v_i deux vecteurs de L_i . Posons

$$\xi = Iu_i - \varepsilon_i \lambda u_i, \quad \eta = Iv_i - \varepsilon_i \lambda v_i$$

avec $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$. ξ et η appartiennent à $\mathfrak{H}^C$. Le symbole $X(u, v)$ étant défini par la formule (9), on peut écrire

$$X(u_i, v_i) = p'(2\lambda^2[u_i, v_i] - 2\varepsilon_i \lambda I[u_i, v_i]) + \frac{\varepsilon_i}{\lambda} X(u_i, \eta) + \frac{\varepsilon_i}{\lambda} X(\xi, v_i).$$

Par hypothèse $X(u, v)$ est nul quels que soient u et v . On en déduit

$$I[u_i, v_i] \equiv \varepsilon_i \lambda [u_i, v_i],$$

par suite

$$[u_i, v_i] \in L_i.$$

Ainsi L_1 et L_2 sont des sous-algèbres.

Inversement supposons qu'il existe deux sous-algèbres propres ⁽¹⁾ L_1 et L_2 de $\mathfrak{G}^C$ satisfaisant aux conditions (13). Choisissons un sous-espace M supplémentaire de $\mathfrak{H}^C$ dans $\mathfrak{G}^C$ et posons $M_1 = M \cap L_1$, $M_2 = M \cap L_2$. Tout élément u de $\mathfrak{G}^C$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $(u_{M_1} + u_{M_2} + u_{\mathfrak{H}^C})$ où $u_{M_1} \in M_1$, $u_{M_2} \in M_2$, $u_{\mathfrak{H}^C} \in \mathfrak{H}^C$. L'opérateur linéaire I sur $\mathfrak{G}^C$ défini par

$$Iu = \lambda(u_{M_1} - u_{M_2}),$$

où λ est un nombre complexe non nul, est nul sur $\mathfrak{H}^C$ et sa restriction à M est un opérateur non trivial. I satisfait à la première des conditions b) du théorème 2. Montrons qu'il satisfait aussi à la seconde; il suffit d'établir que

$$X(u_i, v_j) = 0,$$

où $u_i \in L_i$, $v_j \in L_j$ ($i, j = 1$ ou 2), le symbole $X(u, v)$ étant défini à partir de I par la formule (9). Posons

$$\xi = Iu_i - \varepsilon_i \lambda u_i, \quad \eta = Iv_j - \varepsilon_j \lambda v_j$$

(1) Nous disons qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{G}^C$ est propre si elle n'est ni confondue avec $\mathfrak{G}^C$ ni réduite à l'élément neutre.

avec $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$. ξ et η appartiennent à $\mathfrak{H}^C$. $X(u_i, v_j)$ peut se mettre sous la forme d'une somme de trois termes :

$$\begin{aligned} X(u_i, v_j) = & p'(\lambda^2(1 + \varepsilon_i \varepsilon_j)[u_i, v_j] - \lambda(\varepsilon_i + \varepsilon_j)I[u_i, v_j]) \\ & + p'(\varepsilon_i \lambda[u_i, \eta] - I[u_i, \eta]) \\ & + p'(\varepsilon_j \lambda[\xi, v_j] - I[\xi, v_j]). \end{aligned}$$

Puisque L_1 et L_2 sont des sous-algèbres contenant $\mathfrak{H}^C$, $[u_i, v_i]$ appartient à L_i et $[\xi, v_j]$ à L_j . Les deux derniers termes du second membre sont donc nuls. Si i est différent de j , on a $\varepsilon_i \varepsilon_j = -1$ et $\varepsilon_i + \varepsilon_j = 0$; le premier terme est donc nul. Si $i = j$, le premier terme s'écrit

$$2\lambda p'(\lambda[u_i, v_i] - \varepsilon_i I[u_i, v_i])$$

et il est encore nul puisque $[u_i, v_i]$ appartient à L_i .

Nous énoncerons

THÉORÈME 3. *Pour qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ puisse être doué d'une Π -structure homogène intégrable, il faut que $\mathfrak{G}^C$ admette deux sous-algèbres propres L_1 et L_2 telles que*

$$L_1 + L_2 = \mathfrak{G}^C, \quad L_1 \cap L_2 = \mathfrak{H}^C.$$

Ces conditions sont suffisantes si $(adj.H)$ est connexe.

4. Π -structures homogènes sur les espaces homogènes réductifs.

Suivant la terminologie employée par K. Nomizu [24] dans le cas réel, nous dirons qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ admet une structure d'espace homogène réductif s'il existe un sous-espace M supplémentaire de $\mathfrak{H}^C$ dans $\mathfrak{G}^C$ tel que l'on ait

$$(14) \quad (adj.H)M \subset M,$$

condition équivalente à $(adj.H)M = M$. Nous dirons alors que M est le sous-espace distingué de $\mathfrak{G}^C$.

Définissons comme au paragraphe 2 l'isomorphisme q' de $T_{x_0}^C$ sur M . Pour $h \in H$ et $u \in M$, on a

$$(15) \quad (adj.h)u = q'p'(adj.h)u = q'K'_h p'u.$$

Supposons qu'un tel espace homogène soit de plus muni d'une Π -structure homogène, déterminée par deux sous-espaces propres supplémentaires, T_1 et T_2 ,

de $T_{x_0}^C$, stables par $\tilde{H}$. Posons $M_1 = q' T_1$, $M_2 = q' T_2$. M_1 et M_2 sont supplémentaires dans M . Il résulte de (15) que M_1 et M_2 sont stables par $(adj.H)$.

Inversement, étant donné un espace homogène réductif $V_m = G/H$, supposons que le sous-espace distingué M de $\mathfrak{G}^C$ admette une décomposition en somme directe de deux sous-espaces propres M_1 et M_2 , stables par $(adj.H)$. Les sous-espaces $T_1 = p' M_1$ et $T_2 = p' M_2$ de $T_{x_0}^C$ sont supplémentaires et stables par $\tilde{H}$. Ils déterminent donc une Π -structure homogène.

Nous énoncerons

THÉORÈME 1. *Pour qu'un espace homogène réductif $V_m = G/H$ puisse être doué d'une Π -structure homogène, il faut et il suffit que le sous-espace distingué M de $\mathfrak{G}^C$ admette une décomposition en somme directe de deux sous-espaces propres stables par $(adj.H)$.*

D'après l'étude faite au paragraphe 3, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une Π -structure homogène donnée sur l'espace homogène réductif $V_m = G/H$ soit intégrable est que les ensembles $L_1 = M_1 + \mathfrak{h}^C$ et $L_2 = M_2 + \mathfrak{h}^C$ soient des sous-algèbres de $\mathfrak{G}^C$. Or, M_1 et M_2 étant stables par $(adj.H)$, le crochet d'un élément de $\mathfrak{h}^C$ et d'un élément de M_i ($i = 1$ ou 2) appartient à M_i . La condition nécessaire et suffisante pour que L_i soit une sous-algèbre de $\mathfrak{G}^C$ est donc que, pour tout couple (u_i, v_i) d'éléments de M_i , $[u_i, v_i]$ appartienne à L_i . Ceci revient à dire que, pour $u_i \in M_i$ et $v_i \in M_i$, la projection de $[u_i, v_i]$ sur M parallèlement à $\mathfrak{h}^C$ appartient à M_i , ce que nous écrirons $[M_i, M_i]_M \subset M_i$. Nous énoncerons

THÉORÈME 2. *Pour qu'une Π -structure homogène sur un espace homogène réductif $V_m = G/H$ soit intégrable, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(16) \quad [M_1, M_1]_M \subset M_1, \quad [M_2, M_2]_M \subset M_2,$$

où M est le sous-espace distingué de $\mathfrak{G}^C$ et où M_1 et M_2 sont les sous-espaces propres supplémentaires de M , stables par $(adj.H)$, déterminant la Π -structure homogène.

En particulier soit $V_m = G/H$ un espace homogène réductif tel que l'on ait $[M, M] \subset \mathfrak{h}^C$. Alors les conditions (16) sont remplies par tout couple (M_1, M_2) de sous-espaces de M . On en déduit

COROLLAIRE. *Étant donné un espace homogène réductif $V_m = G/H$, tel que le sous-espace distingué M de $\mathfrak{G}^C$ satisfasse à la condition $[M, M] \subset \mathfrak{h}^C$, toute Π -structure homogène sur V_m est intégrable.*

5. II-structures réelles homogènes.

Sur un espace homogène de Lie $V_m = G/H$, nous appellerons *II-structure réelle homogène* toute II-structure réelle (cf. chapitre V) invariante par G .

Si une telle structure existe, le groupe linéaire d'isotropie $\tilde{H}$ laisse invariants deux sous-espaces propres supplémentaires de T_x . Il est donc *réductible* (dans le réel).

Inversement supposons $\tilde{H}$ réductible (dans le réel): il existe un sous-espace propre T_1 de T_{x_0} stable par $\tilde{H}$. Supposons de plus qu'on puisse construire sur T_{x_0} une forme quadratique définie positive invariante par $\tilde{H}$, ce qui se produit si H est compact. Alors le sous-espace T_2 totalement orthogonal à T_1 par rapport à cette forme quadratique est aussi stable par $\tilde{H}$. V_m peut donc être douée d'une *II-structure réelle homogène*.

Les résultats obtenus aux paragraphes précédents pour les II-structures homogènes sont applicables aux II-structures réelles homogènes, les éléments introduits étant supposés réels. Nous énoncerons en particulier les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Pour qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ puisse être doué d'une II-structure réelle homogène, il faut et il suffit qu'il existe sur $\mathfrak{G}$ un opérateur linéaire I , nul sur $\mathfrak{h}$, satisfaisant aux conditions suivantes:*

- a) *les opérateurs I et $(-I)$ ne sont pas idempotents;*
- b) *quels que soient $u \in \mathfrak{G}$ et $h \in H$, on a*

$$I^2 u \equiv u \quad (\text{mod. } \mathfrak{h}),$$

$$(adj. h) I u \equiv I (adj. h) u \quad (\text{mod. } \mathfrak{h}).$$

b) entraîne

b') *quels que soient $u \in \mathfrak{G}$ et $v \in \mathfrak{h}$, on a*

$$I^2 u \equiv u \quad (\text{mod. } \mathfrak{h}),$$

$$[I u, v] \equiv I[u, v] \quad (\text{mod. } \mathfrak{h}).$$

Si $(adj. H)$ est connexe, b) et b') sont équivalentes.

THÉORÈME 2. *Pour qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ puisse être doué d'une II-structure réelle homogène intégrable, il faut qu'il existe sur $\mathfrak{G}$ un opérateur linéaire I , nul sur $\mathfrak{h}$, satisfaisant aux conditions suivantes:*

- a) les opérateurs I et $(-I)$ ne sont pas idempotents;
 b) quel que soient les éléments u et v de $\mathfrak{G}$, on a

$$I^2 u \equiv u \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}),$$

$$[u, v] + [Iu, Iv] - I[Iu, v] + I[Iv, u] \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}).$$

Ces conditions sont suffisantes si $(\text{adj. } H)$ est connexe.

THÉORÈME 3. Pour qu'un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ puisse être doué d'une Π -structure réelle homogène intégrable, il faut que $\mathfrak{G}$ admette deux sous-algèbres propres L_1 et L_2 telles que

$$L_1 + L_2 = \mathfrak{G}, \quad L_1 \cap L_2 = \mathfrak{H}.$$

Ces conditions sont suffisantes si $(\text{adj. } H)$ est connexe.

Dans ce paragraphe, un espace homogène de Lie $V_m = G/H$ sera dit *réductif* (au sens de K. Nomizu) s'il existe un sous-espace M supplémentaire de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$ tel que l'on ait $(\text{adj. } H) M \subset M$. Nous dirons alors que M est le sous-espace *distingué* de $\mathfrak{G}$. Si on a de plus $[M, M] \subset \mathfrak{H}$, l'espace homogène réductif sera dit *localement symétrique*, suivant la terminologie de A. Lichnerowicz [23]. Nous pouvons alors énoncer

THÉORÈME 4. Pour qu'un espace homogène réductif $V_m = G/H$ puisse être doué d'une Π -structure réelle homogène, il faut et il suffit que le sous-espace distingué M de $\mathfrak{G}$ admette une décomposition en somme directe de deux sous-espaces propres stables par $(\text{adj. } H)$.

THÉORÈME 5. Pour qu'une Π -structure réelle homogène sur un espace homogène réductif $V_m = G/H$ soit intégrable, il faut et il suffit que l'on ait

$$[M_1, M_1]_M \subset M_1, \quad [M_2, M_2]_M \subset M_2,$$

où M est le sous-espace distingué de $\mathfrak{G}$ et où M_1 et M_2 sont les sous-espaces propres supplémentaires de M , stables par $(\text{adj. } H)$, déterminant la Π -structure réelle homogène.

COROLLAIRE. Sur un espace homogène réductif localement symétrique, toute Π -structure réelle homogène est intégrable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Aragnol, *Connexions euclidiennes canoniquement associées à certaines structures presque-produit* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 242, 1956, p. 339-341).
- [2] D. Bernard, *Sur les G-structures complexes* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 1821-1824).
- [3] S. Bochner, *Vector fields and Ricci curvature* (Bull. Amer. Math. Soc., t. 52, 1946, p. 776-797).
- [4] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Hermann, Paris, 1945).
- [5] S. S. Chern, *Characteristic classes of Hermitian manifolds* (Ann. Math., t. 47, 1946, p. 85-121).
- [6] C. Chevalley, *Theory of Lie groups* (Princeton University Press, 1946).
- [7] C. Ehresmann, *Sur les variétés presque complexes* (Proc. Int. Congr. Math., 1950, t. II, p. 412-419).
- [8] C. Ehresmann et P. Libermann, *Sur les structures presque hermitiennes isotropes* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1281-1283).
- [9] B. Eckmann, *Sur les structures complexes et presque complexes* (Coll. Int. C. N. R. S. Géom. Diff., Strasbourg, 1953, p. 151-159).
- [10] A. Frölicher, *Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen* (Math. Ann., t. 129, 1955, p. 50-95).
- [11] A. Frölicher et A. Nijenhuis, *Some new cohomology invariants for complex manifolds* (Proc. Konin. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, t. A-59, 1956, p. 540-564).
- [12] H. Guggenheimer, *Über Kählersche und symplektische Differentialalgebren* (Tôhoku Math. Journ., t. 4, 1952, p. 157-171).
- [13] W. V. D. Hodge, *Structure problems for complex manifolds* (Rend. Mat., t. 11, 1952, p. 101-110).
- [14] G. Legrand, *Connexions définies sur une variété presque hermitique* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 1626-1627).
- [15] G. Legrand, *Connexions infinitésimales définies sur l'espace fibré des repères affines d'une variété différentiable* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 586-588).
- [16] G. Legrand, *Sur les espaces homogènes presque complexes* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2044-2046).
- [17] G. Legrand, *Sur les variétés à structure de presque-produit complexe* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 242, 1956, p. 335-337).
- [18] G. Legrand, *Structures presque hermitiennes au sens large* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 1392-1395).
- [19] P. Libermann, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales* (Ann. Matematica, t. 36, 1954).
- [20] P. Libermann, *Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières* (Bull. Soc. Math. France, t. 83, 1955, p. 195-224).
- [21] A. Lichnerowicz, *Un théorème sur les espaces homogènes complexes* (Arch. Math., t. 5, 1954, p. 207-215).
- [22] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie* (Ed. Cremonese, Roma, 1955).
- [23] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations* (Dunod, Paris, 1958).

- [24] K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces* (Amer. Journ. Math., t. 76, 1954, p. 33-65).
- [25] J. A. Schouten et D. Van Dantzig, *Über unitäre Geometrie* (Math. Ann., t. 103, 1930 p. 319-346).
- [26] D. C. Spencer, *Differentiable manifolds* (Notes miméographiées, Princeton University).
- [27] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles* (Princeton University Press, 1951).
- [28] A. Weil, *Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe* (Comm. Math. Helv., t. 20, 1947, p. 110-116).
- [29] K. Yano, *Quelques remarques sur les variétés à structure presque complexe* (Bull. Soc. Math. France, t. 83, 1955, p. 57-80).
- [30] K. Yano, *On three remarkable affine connections in almost Hermitian spaces* (Proc. Konin. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, t. A-58, 1955, p. 24-32).

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. CONNEXIONS INFINITÉSIMALES SUR UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL	4
1 - <i>Espaces fibrés principaux: terminologie et notations.</i>	5
2 - <i>Connexions infinitésimales.</i>	5
3 - <i>Formes tensorielles. Différentielle absolue et courbure.</i>	7
4 - <i>Groupes d'holonomie.</i>	8
5 - <i>Connexions linéaires et connexions affines.</i>	11
6 - <i>Connexions linéaires et connexions affines complexes.</i>	14
CHAPITRE II. Π -STRUCTURES	15
1 - <i>Définition des Π-structures.</i>	16
2 - <i>Bases adaptées.</i>	17
3 - <i>Torsion d'une Π-structure. Intégrabilité.</i>	17
4 - <i>Opérateurs C et M sur les formes. Relation fondamentale.</i>	19
5 - <i>Applications de la relation fondamentale.</i>	22
6 - <i>Π-connexions. Groupes d'holonomie.</i>	27
7 - <i>Formes caractéristiques d'une Π-connexion.</i>	30
CHAPITRE III. STRUCTURES PRESQUE HERMITIENNES AU SENS LARGE	33
1 - <i>Définition des structures presque hermitiennes au sens large.</i>	33
2 - <i>Bases H-adaptées.</i>	35
3 - <i>Isomorphismes de T_1 sur T_2 associés à une structure presque hermitienne au sens large. Cas des structures presque hermitiennes au sens ordinaire.</i>	37
4 - <i>H-connexions.</i>	40
5 - <i>Groupes d'holonomie des H-connexions.</i>	45
6 - <i>Forme caractéristique d'une H-connexion.</i>	46
CHAPITRE IV. CAS PARTICULIERS DE STRUCTURES PRESQUE HERMITIENNES AU SENS LARGE	47
1 - <i>Structures hermitiennes et pseudohermitiennes.</i>	47
2 - <i>Structures presque kählériennes.</i>	50
3 - <i>Structures kählériennes et pseudokählériennes.</i>	51

CHAPITRE V. II-STRUCTURES RÉELLES ET STRUCTURES PRESQUE PARA-HERMITIENNES.	53
1 - <i>Définition des II-structures réelles.</i>	53
2 - <i>Torsion et intégrabilité.</i>	55
3 - <i>Structures presque parahermitiennes.</i>	57
4 - <i>Structures presque complexes associées à une structure presque parahermitienne.</i>	59
CHAPITRE VI. II-STRUCTURES HOMOGÈNES.	62
1 - <i>Espaces homogènes de Lie.</i>	63
2 - <i>II-structures homogènes.</i>	64
3 - <i>II-structures homogènes intégrables.</i>	67
4 - <i>II-structures homogènes sur les espaces homogènes réductifs.</i>	71
5 - <i>II-structures réelles homogènes.</i>	73
BIBLIOGRAPHIE	75

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Espaces de suites

Vu et approuvé :

Paris, le 14 mai 1958.

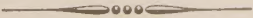
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

Joseph PÉRÈS

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Jean SARRAILH



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

157495-60

Dépôt légal, Imprimeur, 1960, n° 1392.

Imprimé en France

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

157495-60

Dépôt légal, Imprimeur, 1960, n° 1392.

Imprimé en France